МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ВОДНЫХ ПРОБЛЕМ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Ханьлинь Ян

ВЛИЯНИЕ ВИХРЕВЫХ ОБРАЗОВАНИЙ НА ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУР НА ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ В СТАЦИОНАРНЫХ И ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ПОТОКАХ ВОДЫ

Специальность 1.6.16 Гидрология суши, водные ресурсы, гидрохимия

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

научный руководитель:
к.ф.-м. н. доцент
И.Н. Иванова
научный консультант:
д.ф.-м.н. профессор
А.Н. Гельфан

Москва – 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....3
Глава 1.Развитие представлений о процессах взаимодействия стационарного и осциллирующего потоков с подстилающей поверхностью (обзор публикаций).....7
1.1 Устойчивость плоскопараллельного движения в придонной области потока.....7
1.2 Механизм образования вихрей в придонной области потока.....17
1.3 Связь параметров вихрей с характеристиками потока.....20
Глава 2. Описание лабораторных экспериментов.....25
2.1 Лабораторное моделирование формирования вихрей у подстилающей поверхности.....25
2.2 Лабораторное моделирование образования гряд на размываемом дне осциллирующим потоком.....32
Глава 3. Результаты лабораторных экспериментов и их интерпретация.....34
3.1 Результаты экспериментов в равномерном и замедляющемся потоках.....34
3.2 Результаты эксперимента с осциллирующим потоком.....47
Глава 4. Заключение.....54
Список литературы.....56
Благодарности.....63

ВВЕДЕНИЕ.

Актуальность темы. Исследование механизмов потери устойчивости течений в пограничном слое потока у твердой поверхности актуально при решении многих гидрофизических задач, в том числе, при описании особенностей придонных течений открытых потоков, процессов переноса наносов и примесей, донных деформаций в реках и каналах. Начиная с классической работы 1904 года Л. Прандтля, показавшего, что под действием положительного градиента давления в пограничном слое потока вблизи поверхности течение тормозится, и могут возникать вихри, потеря устойчивости ламинарного течения описана во многих экспериментальных и натурных исследованиях (Materny et al., 2008; Nagib, Chauhan, 2018; Raayai-Ardakani, Kinley, 2019). В работах (Egorov et al., 2002; Мельникова, 2005; Мельникова, Показеев, 2018) по результатам экспериментов в прямом канале показано, что в пограничном слое потока с обратным градиентом давления процесс торможения жидкости имеет циклический характер и сопровождается периодической генерацией цепочки цилиндрических вихрей с горизонтальной осью, «вылетающих» из вязкого слоя в поперечном направлении; вихри деформируются и перемещаются при взаимодействии с течением и твердыми стенками. После «вылета» вихрей ламинарное течение восстанавливается. Сходный эффект периодического выброса возмущений у стенки в потоке с обратным градиентом давления был экспериментально зафиксирован в зоне резкого расширения прямой трубы и замедления течения (Lebon et al., 2018). Можно предположить, что в процессе периодического торможения потока форма вертикального профиля скорости меняется, и что существует критическая фаза этого процесса, при которой деформация профиля сопровождается потерей устойчивости плоскопараллельного движения. Другая гипотеза состоит в том, что сходный механизм взаимодействия с поверхностью характерен не только для стационарного, но и для осциллирующего потока, что позволяет по-новому описать процесс формирования первичных русловых форм (гряд) на первоначально гладком размываемом дне. Экспериментальная проверка обеих гипотез дает возможность расширить представления о физических механизмах взаимодействия стационарного и осциллирующего потоков с подстилающей поверхностью и составляет содержание настоящей работы.

Цели работы:

- Разработать методику экспериментального исследования поля скорости в пограничном слое потока с обратным градиентом давления в прямом канале с гладким дном и оценить деформацию вертикального профиля скорости течения в процессе торможения жидкости в пограничном слое.
- Оценить устойчивость ламинарного течения на границе равномерного и тормозящегося потоков в фазе максимального торможения жидкости.
- Разработать методику экспериментального исследования формирования гряд на первоначально плоском песчаном дне длинной гармонической волной и проверить гипотезу, связывающую формирование параллельных гряд на песке с воздействием цепочки вихрей, возникающей в придонном слое в зоне торможения течения.

Научная новизна работы.

Новизна полученных результатов состоит в следующем:

- В работе экспериментально показано, что обратный градиент давления и сила трения приводят к периодическому торможению пограничного слоя плоскопараллельного течения в открытом канале, и получены вертикальные профили скорости в различных фазах торможения жидкости.
- Подтверждено предположение, что в процессе периодического торможения потока вертикальный профиль скорости деформируется, при этом наибольшее торможение происходит в тонком слое на границе равномерного и замедляющегося течения, где формируются цилиндрические вихри и происходит потеря устойчивости плоскопараллельного движения.
- Экспериментально подтверждена гипотеза, связывающая формирование параллельных гряд на первоначально гладком размываемом дне с воздействием цепочки вихрей, возникающей в придонном слое в зоне торможения течения, продемонстрировано сходство механизмов взаимодействия размываемого дна с осциллирующим и стационарным потоками.

Защищаемые положения:

1. Обратный градиент давления в потоке приводит к периодическому торможению пограничного слоя плоскопараллельного течения в открытом канале. Это приводит к изменению вертикального профиля скорости в придонном слое от устойчивого до неустойчивого. При критическом падении скорости на границе равномерного и тормозящего участков потока над вязким слоем формируются вихри, что свидетельствует о потере устойчивости ламинарного течения. После «вылета» вихрей ламинарное течение восстанавливается.

2. На размываемом дне в момент формирования вихрей происходит захват донных частиц. В месте формирования вихревых нитей образуются параллельные канавки, вытянутые в поперечном направлении. Расстояние между канавками равно расстоянию между вихревыми нитями.

3. В осциллирующем потоке при проходе длинной волны вихри образуются в фазах, в которых существует обратный градиент давления, как и в стационарных потоках. Вихри захватывают песок, формируя начальные канавки, поднимаются вверх, и при смене знака орбитальной скорости устремляются вниз. В месте приземления вихри теряют песок, образуя насыпь между начальными канавками.

Обоснованность и достоверность результатов.

Результаты работы были получены в ходе экспериментов, тщательно обработаны и проверены с использованием соответствующих вероятностных моделей с оценкой доверительных интервалов точности измерений. Общие выводы и предложенные гипотезы были проверены не только по этим экспериментам, но также сопоставлялись с результатами других исследований.

Апробация работы:

Автор участвовал в следующих научных конференциях: XVII Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах» имени А. П. Сухорукова «Волны-2020», (Москва, Russia), 23-28 августа 2020; XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов 2020" (Москва, Russia); XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов 2021" (Москва, Russia); XXIX Международная научная

конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов 2022" (Москва, Russia); «Scientific Research Of The SCO Countries: Synergy And Integration», (2023, Пекин).

Личный вклад автора:

Автор самостоятельно проводил все эксперименты, обработку и анализ результатов, составил литературный обзор по исследуемой тематике, принимал активное участие в написании статей, которые полностью основаны на результатах автора.

Публикации.

По теме диссертационной работы опубликовано 6 печатных работ, из них 4 – в научных изданиях, рекомендованных ВАК и относящихся к высшей категории К1 (согласно списку Рабочей группы ВАК по категорированию научных изданий от 06.12.2022 № 02–1198)

Объем и структура работы.

Диссертационная работа состоит из 4 глав, введения, заключения, списка литературы. Объем работы составляет 63 страницу, включая 24 рисунка и 2 таблицы. Библиографический список содержит 73 наименований, из которых 58 на иностранных языках.

Благодарности. Автор выражает благодарности.

1.РАЗВИТИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О ПРОЦЕССАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СТАЦИОНАРНОГО И ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ПОТОКОВ С ПОДСИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ (ОБЗОР ПУБЛИКАЦИЙ).

1.1 Устойчивость плоскопараллельного движения в придонной области потока.

Взаимодействие течений и твердых поверхностей возникает практически во всех технических и природных системах, включающих потоки жидкости. В отличие от «идеальной» жидкости в тонком слое потока, который прилегает к стенке, доминирует вязкость, и жидкость течет без проскальзывания. Выше вязкого слоя образуется пограничный слой, где вязкость еще сильно влияет на течение. Хотя двухслойная модель упрощена, этот подход часто используется при моделировании. Течение жидкости удовлетворяет уравнению Навье-Стокса, включающего влияние вязкой диффузии и градиента давления. Для несжимаемой жидкости можно написать

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + v\Delta u, \qquad \nabla u = 0, \qquad u|_s = 0 \tag{1}$$

где $\boldsymbol{u}$ – скорость течения, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{v}$ – плотность и кинематическая вязкость жидкости, $\boldsymbol{p}$ – давление, $\boldsymbol{t}$ – время, $\boldsymbol{S}$ – поверхность раздела, последнее выражение в (1) граничное условие.

Для стационарных потоков без градиента давления на основе соображений подобия Л. Прандтлем (Prandtl, 1904) было получено выражение для вертикального профиля горизонтальной скорости $\boldsymbol{u(y)}$ в пограничном слое в виде логарифмической функции:

$$u = u_*(\frac{1}{k} ln \frac{yu_*}{v} + c), \quad u_* = \sqrt{v\frac{\partial u}{\partial y}}, \qquad k, C = const \tag{2}$$

где u_* — скорость на некотором расстоянии от стенки, v — кинематическая вязкость.

Прандтль (Prandtl, 1904) впервые предположил, что под действием положительного градиента давления в пограничном слое потока течение должно тормозиться вплоть до полной остановки жидкости, при которой нарушается устойчивость ламинарного течения, что приводит к возникновению вихрей. Численное моделирование таких нестационарных пограничных течений является сложной задачей, которую в полной мере пока решить не удалось. Различными исследователями были сделаны попытки эмпирически подобрать параметры и способы нормировки для представления вертикального профиля усредненной по времени скорости замедляющегося течения в виде экспонент, подобных решению (2), но решить эту задачу не удалось (Materny et al., 2008; George, 2006; Wosnik et al., 2000; Stanislas, 2008). Профили скорости, полученные для зон замедления стационарного течения методами прямого численного моделирования, обычно имеют однородный участок в тонком слое у дна канала вместо линейного распределения по вертикали, которое наблюдается в экспериментальных и натурных условиях (Materny et al., 2008; Drozdz et al., 2009; Raayai-Ardakani et al., 2019; Nagib et al., 2008; Stone et al., 2007; Мельникова, 2005; Kamal et al., 2016; Minh et al., 2019). В (Мельникова, 2005) было экспериментально показано, что в прямом канале в пограничном слое потока с обратным градиентом давления имеет место нестационарный циклический процесс торможения жидкости, каждый цикл при этом заканчивается формированием цепочки цилиндрических вихрей с горизонтальной осью, направленной в поперечном направлении. В исследованиях (Lebon et al., 2018) был экспериментально зафиксирован периодический выброс возмущений у стенки в потоке с положительным градиентом давления в зоне расширения прямой трубы и замедления течения. В работе (Selvam et al., 2016; Ori et al., 2007) исследуется корреляция между вихревыми возмущениями и локальной турбулентностью, и при возникновении локальных точек турбулентности в пограничном слое (Selvam et al., 2016 ; Benoit et al., 2018). Данный вопрос конечно изучается не только экспериментально, но и посредством численного моделирования (Dhanush et al., 2019; Baru et al., 2015; Wang et al., 2004). В центре внимания исследователей также находится переход от ламинарного потока (Lebon et al., 2018) к турбулентному потоку (Farano et al., 2017). Исследования носят не только теоретический характер, но и имеют практическое применение, например изучение влияния гидродинамических характеристик потока в речных руслах на формирование эстуариев (Исупова,

Долгополова, 2016), а также изучение особенностей речного потока под ледяным покровом (Дебольская, 2003).

Нарушение устойчивости жидкости вихрями, упомянутое выше, наиболее явно проявляется при изучении осциллирующих течений, где процесс формирования песчаных гряд на дне осциллирующего потока и их морфологические изменения служат наиболее наглядным проявлением этого явления. Сравнение прогнозируемых параметров гряд, полученных на основе эмпирических формул, с данными экспериментов показывает, что геометрические характеристики гряд не могут быть предсказаны на основе только одного безразмерного параметра. Обилие предикторов, использующих различные параметры, а также значительные отклонения между прогнозами, говорят о том, что проблема прогнозирования характеристик гряд, сформированных волнами, еще далека от окончательного решения. Основной причиной является отсутствие надежной физической модели взаимодействия осциллирующего потока жидкости с размываемой подстилающей поверхностью. Известные модели основаны на линейном анализе устойчивости ламинарного движения осциллирующего потока к бесконечно малым синусоидальным возмущениям на донной поверхности (Blondeaux et al., 2014). Результаты такого анализа в некоторых случаях позволяют предсказать потерю устойчивости, но не дают размеров новых форм устойчивых возмущений – гряд, которые можно зафиксировать в эксперименте. Решение нелинейной задачи определяется формой конечных возмущений, которая задается заранее. При таком подходе можно искать наиболее критическое для устойчивости ламинарного движения возмущения.

В исследованиях замедляющихся потоков (Мельникова, 2005; Lebon et al., 2018) при малых числах Рейнольдса $Re < 10^4$ потеря устойчивости ламинарного движения не зависела от числа Re, т.е. не зависела от вязкости. Для невязкого течения основным критерием потери устойчивости является форма вертикальных профилей скорости. Если профиль скорости под действием обратного градиента давления меняется, то можно предположить, что существует критическая фаза периодического процесса торможения, в которой на профиле формируется особенность, обеспечивающая потерю устойчивости ламинарного движения. Для проверки сделанного предположения необходимо получить экспериментально вертикальные профили скорости в различных

фазах процесса торможения течения с обратным градиентом давления. Решение этой задачи является целью настоящей работы.

Проблема устойчивости стационарных систем всегда была одной из важных проблем, которые необходимо учитывать при изучении механики сплошной среды. Задачи устойчивости в гидродинамике и аэродинамике являются достаточно сложными. Чтобы решить эти проблемы, используют специальные численные методы, которые очень универсальны и могут эффективно использоваться в механике сплошных сред и других областях. В линейной теории гидромеханической устойчивости исследуется поведение малых возмущений стационарного состояния жидкости. Стационарное состояние — это состояние, в котором все характеристики движения жидкости (такие как скорость, давление, распределение температуры и т. д.) не зависят от времени в каждой точке области. Нестационарность состояния приведет к тому, что одна стационарная мода изменится на другую стационарную или нестационарную, структура движения будет более сложной, может возникнуть турбулентный поток, и произойдет нерегулярное хаотическое движение.

Выделим следующие основные этапы исследования устойчивости стационарных гидродинамических систем:

1. Определяется стационарное состояние жидкости.

2. Решение полной нелинейной задачи гидродинамики представляют в виде суммарной функции, состоящей из решения стационарной задачи и малой нестационарной добавки – возмущения, зависящего от времени и координат.

3. Суммарную функцию подставляют в полное уравнение движения, теплопроводности и другие уравнения, например, в случае вязкой несжимаемой изотермической жидкости, уравнения Навье-Стокса и уравнения неразрывности. Кроме того, все уравнения линеаризуются относительно малых возмущений.

4. Если коэффициенты уравнения не зависят от координат, то можно разделить переменные: решение представляют как экспоненциальную зависимость от времени ($\sim e^{-\lambda t}$) и периодические зависимости от пространственных координат (в двумерном случае $\sim e^{i(k_x x + k_y y)}$). Для амплитуд возмущений, зависящих лишь от одной координаты z, получается однородная краевая задача с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

5. В эту задачу входят комплексный декремент $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$, описывающий изменение возмущения со временем, вещественный волновой вектор k и некоторые безразмерные параметры (критерии подобия), характеризующие интенсивность внешнего воздействия на систему и свойства жидкости. Декременты λ могут рассматриваться как собственные значения краевой задачи, а амплитуды возмущений являются собственными функциями. Если для какого-нибудь λ вещественная часть декремента оказывается отрицательной ($\lambda_i < 0$), то эти возмущения со временем нарастают, стационарное состояние неустойчиво.

6. Обычно рассматривают так называемое нейтральное возмущение, его $\lambda_r = 0$. В этом случае собственным значением является один из критериев подобия, поэтому строят зависимость этого параметра от волнового числа – нейтральную кривую. Например, при исследовании устойчивости изотермических течений определяется зависимость числа Рейнольдса Re от волнового числа k. Наиболее критическими являются возмущения такой длины волны, для которых критическое число Рейнольдса минимально.

Исследование гидродинамической устойчивости очень важно, поскольку при изменении режима движения характеристики системы обычно меняются в нежелательном направлении, нужно знать, когда это произойдет. В некоторых случаях результаты теории гидродинамической устойчивости позволяют контролировать пороговую неустойчивость системы.

Один из простых критериев, позволяющий судить о невязкой устойчивости течения — наличие в профиле скорости точки перегиба (Дикий, 1976; Дразин, 2005). рис. 1.

Плоскопараллельные движения идеальной несжимаемой жидкости между пластинами $y = 0$ и $y = h$ в поле силы тяжести описываются уравнениями Эйлера с граничными условиями.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -g$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$v|_{y=0} = 0$$
$$v|_{y=h} = 0 \qquad (3)$$

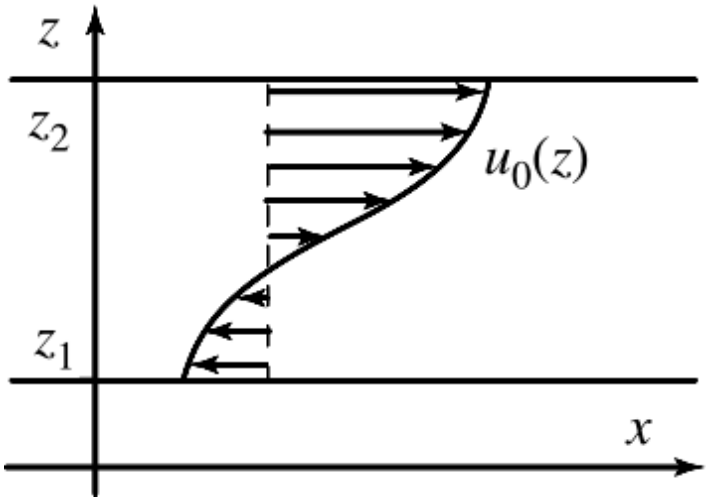


Рис. 1. Течение, заданное профилем скорости $u_0(z)$.

Здесь u, v — проекции вектора скорости на оси x, y; t — время; p — давление, плотность жидкости ρ, ускорение свободного падения g и высоту канала h можно считать равными единице. Уравнения (1) имеют класс решений, описывающих сдвиговые течения жидкости.

$$u = U(y), \quad v = 0, \quad p = \rho g(h - y) + p_0(t) \qquad (4)$$

В результате линеаризации системы (3) на заданном сдвиговом потоке (4) и построения решений для малых возмущений в виде элементарных волновых пакетов $u(t, x, y) = \hat{u}(y)exp(i\alpha(x - ct))$ получаем уравнение Рэлея.

$$(U - C)(\psi_{yy} - \alpha^2\psi) - U_{yy}\psi = 0, \quad \psi|_{y=0} = 0, \quad \psi|_{y=h} = 0 \qquad (5)$$

где ψ – функция тока, α – волновое число в направлении оси x, C – фазовая скорость волны. На основе (5) выводятся классические критерии устойчивости (Дикий, 1976; Дразин, 2005), зависящие от вида профиля скорости основного течения.

Критерий Рэлея. Достаточным условием устойчивости плоскопараллельного течения является отсутствие у профиля скорости *U(y)* точек перегиба.

Критерий Фьёртофта. Если существует постоянная *K*, такая что

$$(U(y) - K)U''(y) \geq 0 \tag{6}$$

то течение устойчиво.

Критерий Розенблюта — Симона. Пусть $U'(y) > 0$ и имеется одна точка $U''(y_s) = 0$, причем $U'''(y_s) < 0$. Тогда для устойчивости течения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие.

$$J = \frac{1}{U'(y)(U(y)-U(y_s))}\Big|_0^h - \int_0^h \left(\frac{1}{U'(y)}\right)' \frac{dy}{U(y)-U(y_s)} > 0 \tag{7}$$

В длинноволновом приближении система уравнений (3) принимает вид (Чесноков, 1998)

$$u_t + uu_x + vu_y + p^{-1}p_x = 0$$
$$p_y = -\rho g \tag{8}$$

Здесь $v = -\int_0^y u_x dy$. Устойчивость рассматриваемых течений всегда может быть проверена одним из критериев Рэлея, Фьёртофта или Розенблюта — Симона. Действительно, в случае отсутствия точек перегиба течение устойчиво согласно критерию Рэлея, в случае наличия точки перегиба y_s, такой что $U'''(y_s) > 0$, выполняется условие Фьёртофта (6) с постоянной $K=U(y_s)$, а в случае $U'''(y_s) < 0$ устойчивость или неустойчивость течения определяется критерием Розенблюта — Симона. Для данного класса течений выполнение одного из критериев устойчивости является необходимым и достаточным условием гиперболичности уравнений движения. Примеры течений приведены на рис. 2

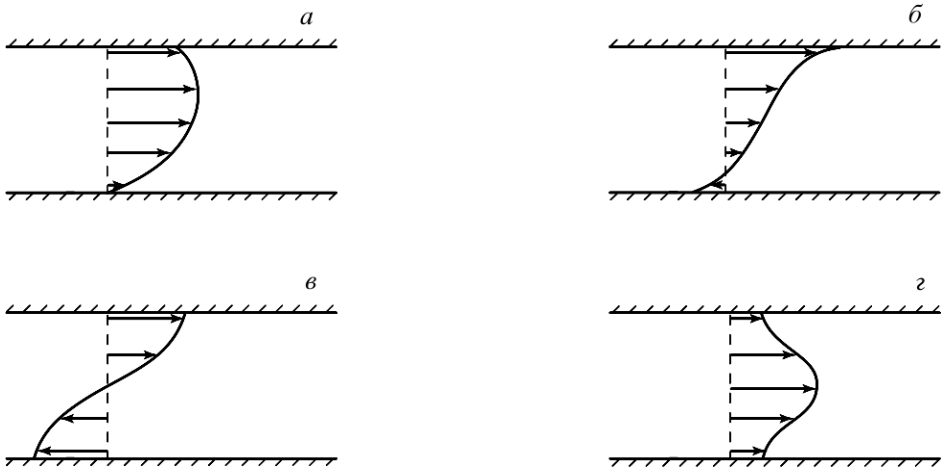


Рис. 2. Устойчивые и неустойчивые течения. (а) отсутствует точка перегиба, течение устойчиво; (б) есть точка перегиба, но условие Фьёртофта не выполнено, течение устойчиво; (в) есть точка перегиба, условие Фьёртофта выполнено, но течение устойчиво; (г) есть точка перегиба, условие Фьёртофта выполнено, течение неустойчиво. (Дразин, 2005)

Неустойчивость разрыва скорости. Рассмотрим семейство решений (4) системы (8) с функцией *U(y)* следующего вида:

$$U(y) = bth\frac{(2y-h)a}{2h} \tag{9}$$

(a, b — произвольные положительные постоянные). Параметр a влияет на скорость изменения функции $U(y)$ вблизи точки перегиба: при $a \to \infty$ профиль скорости стремится к разрывной кусочно-постоянной функции. Параметр b определяет скорость течения на верхней границе канала при $a \to \infty$. Профиль скорости, полученный по формуле (9) при $b = 1$, $h = 1$ и различных значениях параметра a, показан на рис. 3.

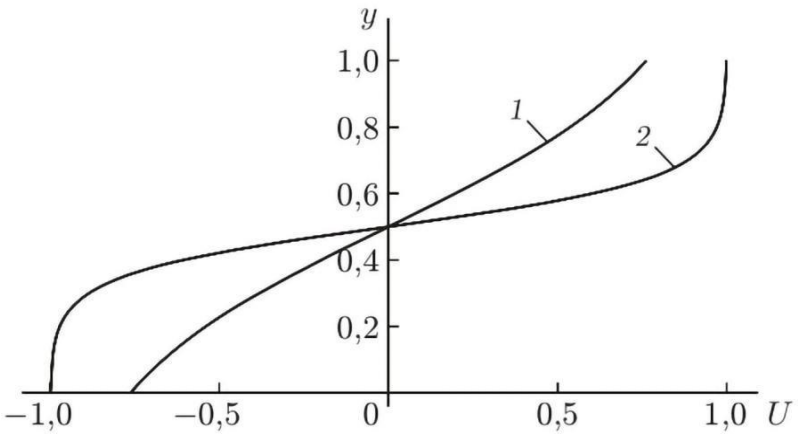


Рис. 3. Профиль скорости, полученный по формуле (9): 1 — a = 2; 2 — a = 10. (Князева, Чесноков, 2012)

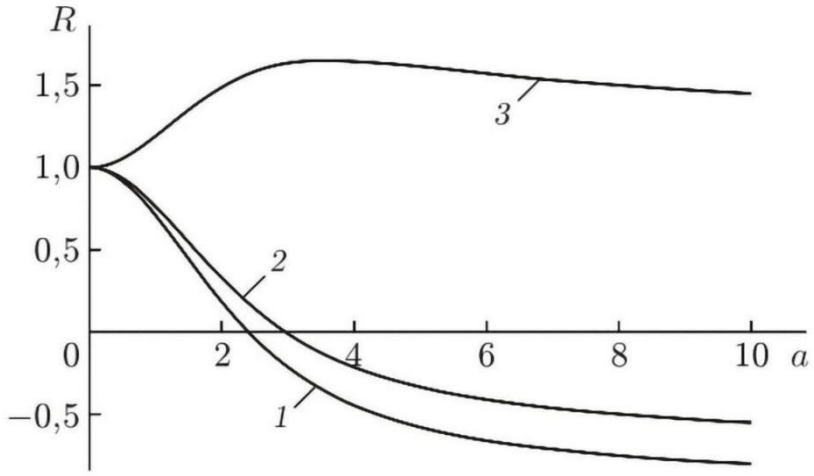


Рис. 4. Функция *R(a)* на решении (9):1 — для уравнений (8); 2, 3 — для уравнений (9) (2 — h= 1, b = 1/2; 3 — h = 1,b = 3/2). (Князева, Чесноков, 2012)

Функция *U(y)* удовлетворяет условию монотонности и имеет одну точку перегиба $y_s = \frac{h}{2}$, причем $U'''y(s) < 0$. Следовательно, для исследования устойчивости применим критерий Розенблюта — Симона. При этом неравенство (7) имеет вид.

$$\mathrm{R} \equiv \psi^{\pm}(U_s) = \frac{h}{a}(2 - ath\frac{a}{2})th\frac{a}{2} > 0 \qquad (10)$$

Согласно критерию Розенблюта — Симона течение устойчиво, если и только если $R(a) > 0$. График функции $R(a)$ при $h = 1$ показан на рис. 4 (кривая 1). При значении параметра $a = a_* \approx 2.4$ (a_* — корень уравнения $a\text{th}(a/2) = 2$) происходит потеря устойчивости течения и изменяется тип системы уравнений движения. В данном случае параметры $b \neq 0$ и $h > 0$ не оказывают влияния на устойчивость течения и тип системы уравнений. Рассматриваемое течение (9), стремящееся при $a \to \infty$ к течению с контактным разрывом, устойчиво при $a < a_*$ и неустойчиво при $a > a_*$. На этом решении при том же значении параметра a_* уравнения движения (8) теряют свойство гиперболичности.

Сдвиговые течения со свободной границей. Плоскопараллельные движения идеальной жидкости в поле силы тяжести над ровным дном $y = 0$ со свободной границей $y = h(t, x)$ в длинноволновом приближении описываются системой уравнений (Чесноков, 1998)

$$u_t + uu_x + vu_y + gh_x = 0$$
$$h_t + (\int_0^h u dy)_x = 0$$
$$v = -\int_0^y u_x dy \qquad (11)$$

В работе (Князева, Чесноков, 2012) показано, что корректное сравнение классических критериев устойчивости сдвиговых течений жидкости и условий гиперболичности нелинейных интегро-дифференциальных уравнений длинноволнового приближения (8) возможно лишь на решениях вида (4). Установлено, что в классе гладких и монотонных профилей скорости $U(y)$, имеющих не более одной точки перегиба, для устойчивости течения в линейном приближении необходимо и достаточно выполнения условий гиперболичности уравнений движения. На примере параметрического семейства (9) решений длинноволновых уравнений (8) показано, что увеличение сдвига скорости приводит к потере свойства гиперболичности и развитию неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. В случае течений со свободной границей увеличение сдвига скорости (и возникновение контактного разрыва) может не привести к потере гиперболичности уравнений движения (10). Анализ устойчивости решений уравнений двухслойной стратифицированной жидкости позволяет объяснить

этот эффект и свидетельствует о неприменимости модели (10) вданном диапазоне параметров.

1.2 Механизм образования вихрей в придонной области потока.

Взаимодействие между потоком воды и твердой поверхностью - важная часть гидродинамики, которую нельзя игнорировать, и для того, чтобы наглядно представить его действие, обычно используется простую и практичную двухслойную модель вязкого-пограничного слоя, которая удовлетворяет уравнению Навье-Стокса (включая эффекты вязкой диффузии и градиента давления) для потока жидкости.

Прандтль (Prandtl, 1904) впервые предположил, что в потоках с обратным градиентом давления тормозящим жидкость, вблизи подстилающейповерхности, где вязкость играет существенную роль, могут возникать вихри. Он показал, что явление отрыва внешнего потока от поверхности выпуклого контура качественно можно объяснить с помощью следующих рассуждений. В зоне положительного градиента давления скорость будет уменьшаться в направлении движения, а давление будет увеличиваться,следовательно, частицы жидкости внутри пограничного слоя будут тормозиться не только за счёт действия сил вязкости, но и за счёт действия обратного градиента давления. Вследствие этого у частиц, расположенных близко от поверхности тела, скорость может обращаться в нуль. Эти частицы, подвергаясь действию обратного градиента давления, должны начать двигаться в обратном направлении. В результате этого обратного течения вблизи поверхности тела будет происходить деформация профиля скорости. Верхняя часть профиля скорости будет по-прежнему выпуклой в сторону течения, а нижняя часть будет выпуклой в обратную сторону. При таком распределении скоростей в слое в каком-то месте может произойти отрыв слоя от стенки. При этом оторвавшаяся часть пограничного слоя в верхней части приобретёт вращение по ходу часовой стрелки, а в нижней части — против хода часовой стрелки. Оторвавшиеся завихрённые части пограничного слоя будут внешним потоком сноситься в сторону течения. Такая картина отрыва пограничного слоя будет повторяться периодически. Опыт показывает (Мельникова, 2005), что отрыв пограничного слоя с верхней и нижней частей границы тела происходит не

одновременно. В результате этого сзади обтекаемого тела завихрения располагаются не друг под другом, а в шахматном порядке.

Из сказанного следует, что отрыв внешнего потока от контура может начаться не раньше той точки, после которой изменяется направление выпуклости профиля распределения скоростей вблизи контура (это утверждение иллюстрируется рис.5 из работы (Joao, 2019)). Но изменение направления выпуклости связано с изменением наклона касательной к кривой профиля скорости, т. е. с изменением знака первой производной от скорости по нормали к поверхности обтекаемого тела. До тех пор, пока в точках вблизи контура профиль распределения скоростей будет выпуклым, первая производная будет положительной. Как только изменится направление выпуклости профиля распределения скоростей вблизи контура, знак этой производной станет отрицательным. Таким образом, Прандтль пришел к следующему условию отрыва пограничного слоя от стенки. Отрыв пограничного слоя может происходить только после той точки, в которой первая производная от скорости течения по координате y обращается в нуль:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \qquad (12)$$

Прандтль полагал, что условие (12) выполняется в первую очередь на твердой границе, где преобладает действие вязких сил. Однако доказательств этого утверждения до сих пор получено не было. Можно предположить, что совместное действие силы трения и обратного градиента давления может сместить зону неустойчивости вверх по нормали к стенке. Чтобы проверить эту гипотезу следует получить вертикальные профили скорости в пограничном слое течения с обратным градиентом давления в различные фазы периодического процесса торможения и оценить зависимость сил торможения и обратного градиента давления от вертикальной координаты.

Так называемые T-S волны (волны Толльмина-Шлихтинга)- нестабильные волны, вызванные небольшими возмущениями (такими как шероховатость поверхности или возмущения набегающего потока в пограничном слое), были открыты в работах

(Schilting, 1929; Tollmlen, 1931), что прояснило механизм формирования продольных волн, которые возникают в ограниченных сдвиговых течениях. В 1944 году Линь математически дал необходимые условия линейной неустойчивости невязкого сжимаемого потока (Lin, 1944). В середине XX века (Dhawan, Narasimha 1958) предложили классическую модель фактора прерывистости в переходной зоне. В более современных работах (Reshotko, 1976; Malik, 1987) было рассмотрено влияние градиента давления на устойчивость, а в работе (Samson et al., 2021) предложено понятие смешанного режима неустойчивости и выполнен анализ прерывистости пограничного слоя с обратным градиентом давления.

В нашей совместной работе экспериментально установлено (Мельникова, Ян, 2022), что в потоках с обратным градиентом давления возникает вихревое движение у шероховатой подстилающей поверхности. Авторы (Мельникова, Ян, 2022) предположили, что смена устойчивости и образование вихрей связаны с особенностями вертикального профиля скорости, на котором возникают точки перегиба при совместном торможении жидкости обратным градиентом давления и силой трения о дно. Обоснованность этого предположения – предмет настоящего исследования – будет рассмотрена в 3-й главе.

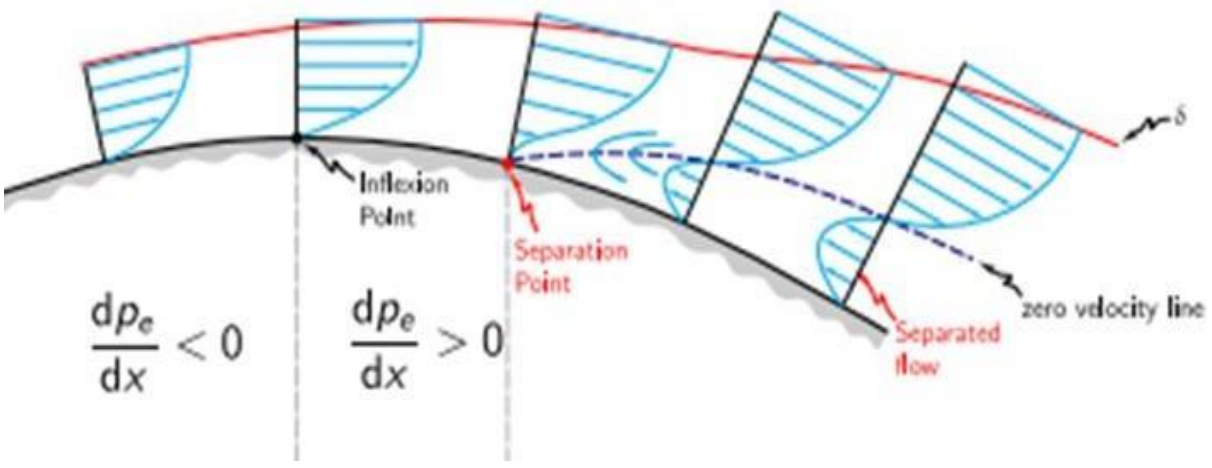


Рис. 5. Качественные профили средней скорости в зависимости от градиента давления при обтекании выпуклого тела потоком жидкости. (Joao, 2019)

1.3. Связь параметров вихрей с характеристиками потока.

В (Egorov et al., 2002) установлено, что каждый цикл уменьшения – увеличения придонной скорости течения заканчивается формированием и вылетом из вязкого слоя цепочки цилиндрических вихрей с горизонтальной осью, направленной в поперечном направлении. Можно предположить, что существует такая фаза периодического процесса торможения течения, в которой формируется такой вертикальный профиль скорости, который обеспечивает потерю устойчивости ламинарного движения невязкой жидкости и формирования вихрей. Для проверки сделанного предположения необходимо получить экспериментально вертикальные профили скорости для различных фаз торможения течения с обратным градиентом давления. В (Мельникова, 2005) было показано, что процесс торможения происходит в пограничном слое периодически. На рис.6 приведена запись придонной скорости потока, периодически меняющейся во времени.

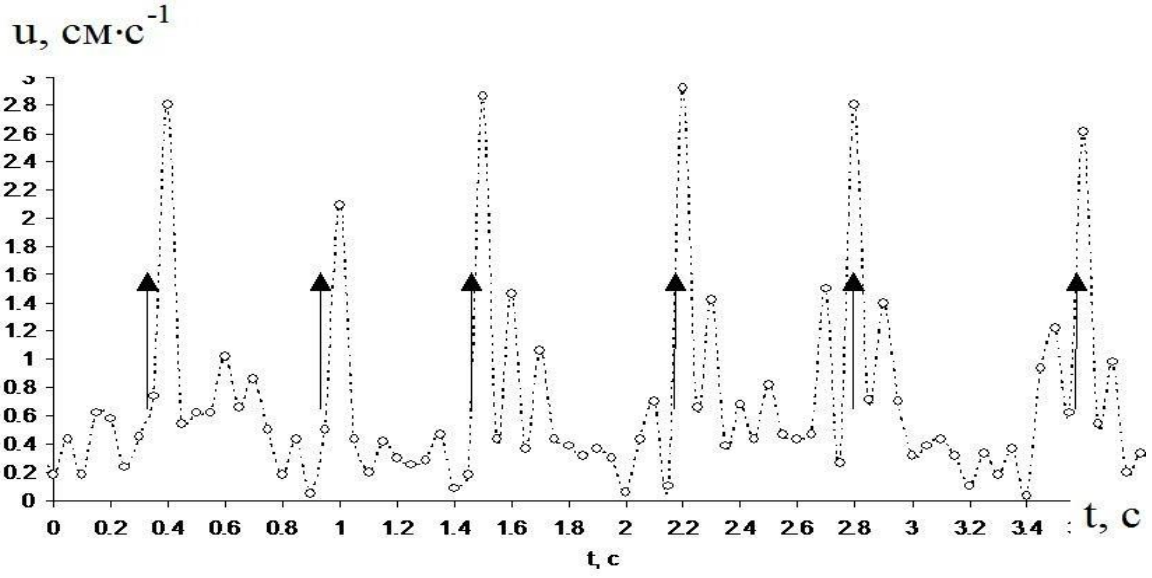


Рис. 6. Придонная скорость замедляющегося потока. Стрелки показывают момент вылета вихрей.(Мельникова, 2005)

В предыдущем разделе было подробно описано, что при стационарном течении при малых числах Рейнольдса $Re < 10^4$, основным критерием для оценки устойчивости ламинарного потока является форма вертикального профиля скорости потока, а значит, способ визуализации характеристик течение жидкости в этих условиях заключается в наблюдении формы вертикального профиля скорости. Возникает вопрос, что происходит в случае осциллирующего течения?

Под длинной гармонической волной на поверхности жидкости на размываемом дне формируются регулярные гряды. Гряды растут при воздействии волны, затем рост прекращается – образуется равновесная фаза с осциллирующим потоком. Начиная с работы (Bagnold, 1946), гряды, формируемые волной, делят на гряды, связанные с вращением донных частиц (rolling-grain ripples), и вихревые гряды (vortex ripples). Первый вид гряд возникает под воздействием волн большой крутизны, когда появляется интенсивное движение влекомых наносов. Связи между размером гряд и параметрами волны на поверхности жидкости в экспериментах не обнаружено, такие гряды называют анорбитальными. Второй вид – «вихревые» гряды – возникает при воздействии линейных волн, формирующих вихри только над нижней по течению стороной гребней гряд. Такие гряды называют орбитальными.

В работе (Nielsen, 1981)экспериментально установлено, что размер «вихревых» или орбитальных гряд определяется параметрами орбитального движения элементарного объема на поверхности жидкости при прохождении волны с орбитальнымдиаметром d и высотой волны H.

Для разделения орбитальных и неорбитальных гряд был предложен ряд безразмерных параметров, таких как число Шильдса (Shields) θ и параметр смещения ψ_c. На практике крутизна гряды (отношение высоты к длине) определяется исключительно количеством смещений ψ_c.

$$\theta = \frac{1}{2} f_w \psi_c, \qquad \psi_c = \frac{U_{max}^2}{((\rho_s - \rho) g D_{50})} \tag{13}$$

Здесь ρ и ρ_s плотность воды и песка, $U_{max} = akC$ – скорость орбитального движения единичного объема жидкости на поверхности воды, C – фазовая скорость волны, D_{50}

– средний диаметр донных частиц, g – ускорение силы тяжести, f_w – волновое сопротивление, определяемое эмпирическим выражением (Swart, 1974):

$$f_w = \begin{cases} exp[5.213(\frac{5D_{50}{}^{0.194}}{d} - 5.977)] & \frac{5D_{50}}{d} > 1.57 \\ 0.3 & \frac{5D_{50}}{d} \leq 1.57 \end{cases} \quad (14)$$

В ряде работ для определения вида песчаных гряд, формируемых волной, использовано отношение d/D_{50} (Wiberg et al., 1994), где D_{50} – медианный диаметр донных частиц. Если при воздействии интенсивных волн большой крутизны d/D_{50}>5000 расстояние между равновесными грядами зависит от D_{50} и не зависит от параметров волны, то гряды считаются анорбитальными (Wiberg et al., 1994). Размер гряд может быть, как пропорционален размеру донных частиц, так и обратно пропорционален их размеру на разных стадиях формирования равновесных условий. При 2000 < d/D_{50} < 5000 расстояние между грядами зависит как от размера частиц, так и от высоты волны, такие гряды называются суборбитальными. Если d/D_{50} < 2000, то расстояние между гребнями гряд S пропорционально амплитуде волны, такие гряды называют орбитальными. В ряде экспериментальных работ для равновесных гряд получено значение S/d = 0.65 (Wiberg et al., 1994).

Считается, что гряды, формируемые волной, отличаются от гряд, формируемых стационарным потоком жидкости. Действительно, форма гряд сильно отличается, однако это может быть следствием разного характера течения жидкости, но не механизма взаимодействия потока и дна. Следует отметить, что в осциллирующем потоке размыв дна происходит только в зоне убывания скорости течения в направлении движения, где имеется обратный градиент давления (dp/dx) > 0. (Мельникова, Показеев, 2018; Мельникова и др., 2021)

Эти гряды существенным образом влияют на гидродинамические характеристики волнового потока, увеличивая шероховатость дна, меняя крутизну поверхностной волны (Admiraal et al., 2006; Ahmed et al., 2001) и процессы размыва в придонной области (Marieu et al., 2008; Arnaud et al., 2016; Doucette et al., 2006). Для того, чтобы получить характеристики гряд, были выполнены лабораторные и натурные исследования (Wang et al., 2019; Wu et al., 2019; Chang et al., 2022; Soria et al., 2022;

Valentin et al., 2023; Luo et al., 2024), в ряде работ использовалось численное моделирование (Mazzuoli et al., 2019; Chen et al., 2022; Tan et al., 2019; Zhou et al., 2019; Wang et al., 2019).

Прандтль считал (Prandtl, 1904), что в таком потоке у дна должны появиться вихри из-за периодической остановки вязкого слоя потоков под действием обратного градиента давления и силы трения. Исследование таких вихрей проводится в работе (Adrian et al., 2012; Andrea et al., 2023). В (Мельникова, Показеев, 2018) в серии экспериментов, показано, что в момент формирования структуры представляют собой цепочку вихревых нитей, вытянутых вдоль поперечной оси, вихри деформируются и перемещаются при взаимодействии с течением и твердыми стенками. В (Мельникова и др., 2021; Мельникова, Ян, 2022) показано, что вихри периодически возникают выше вязкого слоя, а их формирование обусловлено потерей устойчивости плоскопараллельного движения при периодической деформации профиля средней скорости. Можно предположить, что этот же механизм взаимодействия потока и размываемого дна работает в начальный момент времени и в осциллирующем потоке. Целью настоящей работы является проверка этой гипотезы. Проверка осуществлялась по результатам экспериментов и данным, опубликованным в литературе. Математическое моделирование таких нестационарных пограничных течений является довольно сложной задачей, которую пока решить не удалось. Были сделаны попытки подобрать подходящие форму возмущений и вертикальные профили усредненной по времени скорости замедляющегося течения, однако получить согласие экспериментальных и модельных данных не удалось (Nagib, 2008).

В нашей работе экспериментально получены вертикальные профили скорости в пограничном слое потока с обратным градиентом давления в различных фазах периодического процесса торможения жидкости. Показано, что в фазе максимального торможения течения вертикальный профиль скорости имеет локальный минимум с двумя точками перегиба над верхней границей вязкого слоя. Показано, что в слое, содержащем нижнюю точку перегиба течение устойчиво, а в слое с верхней точкой перегиба течение теряет устойчивость при критическом значении перепада скорости вдоль горизонтальной оси. В этом слое формируется цилиндрический вихрь, что подтверждает вывод о потере устойчивости ламинарного течения.

В слое, содержащем нижнюю точку перегиба, течение устойчиво, тогда как в слое, содержащем верхнюю точку перегиба, течение теряет устойчивость, когда разность скоростей по горизонтальной оси достигает критического значения. С учетом этого экспериментально исследуется влияние длинных поверхностных гармонических волн на формирование гряд на плоском песчаном дне в осциллирующих потоках при образовании вихрей.

Предложена гипотеза, связывающая образование параллельных гребней в песке с действием цепочки вихрей, возникающих в придонном слое в зоне торможения потока в первой и третьей четвертях волновой фазы. Вихрь захватывает песок в момент образования, движется под действием давления окружающей жидкости, резко взлетает и тут же устремляется ко дну, где теряет песок, образуя насыпь. Измерения и расчеты параметров вихря очень хорошо совпадают с геометрией гряды, что подтверждает предложенную гипотезу.

2. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ.

2.1 Лабораторное моделирование формирования вихрей у подстилающей поверхности.

Эксперименты проводились на установке кафедры физики моря и вод суши физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Лабораторная установка представляет собой прямой канал с гладкими прозрачными стенками из оргстекла длиной 3.5 м, шириной 15 см, с регулируемым наклоном дна. Наклон дна дает возможность моделировать замедляющиеся и ускоряющиеся потоки. Экспериментальная установка и составляющие ее элементы показаны на рис. 7-9.

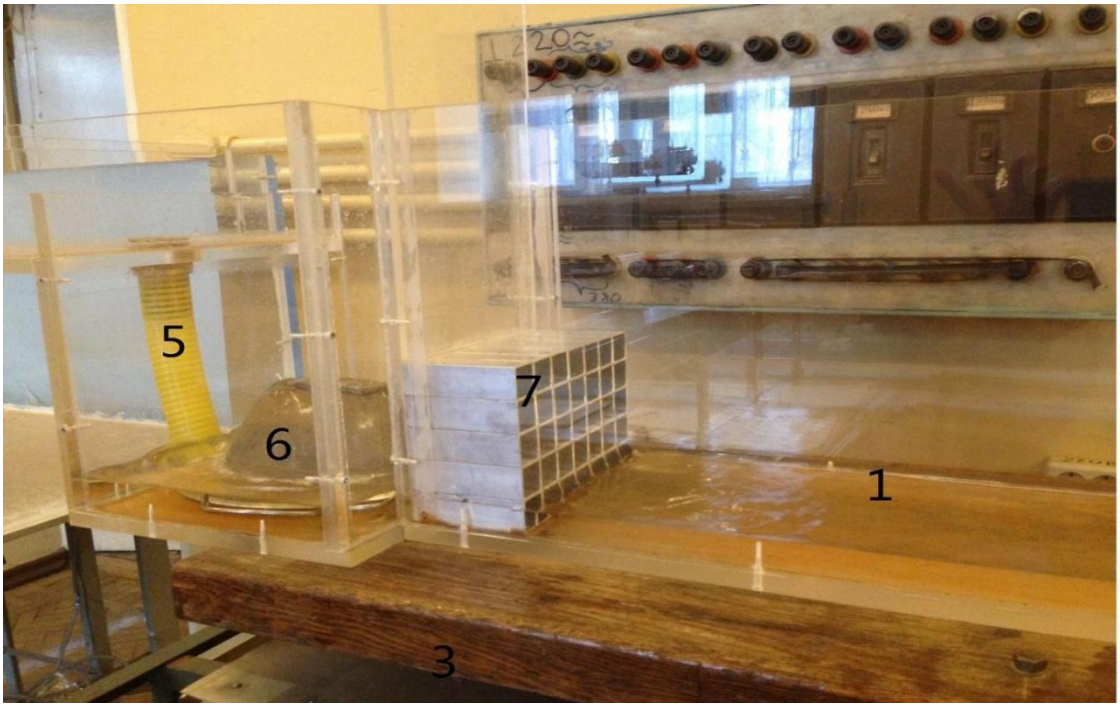


Рис. 7. Экспериментальная установка. 1. Канал из органического прозрачного стекла (длиной 3,5 метра и шириной 15см). 2. Водяной насос. 4. Автотрансформатор. 8. Фоновая пластина. 9. Измерительная шкала. 10. Камера со штативом. 11. Резервуар с водой.

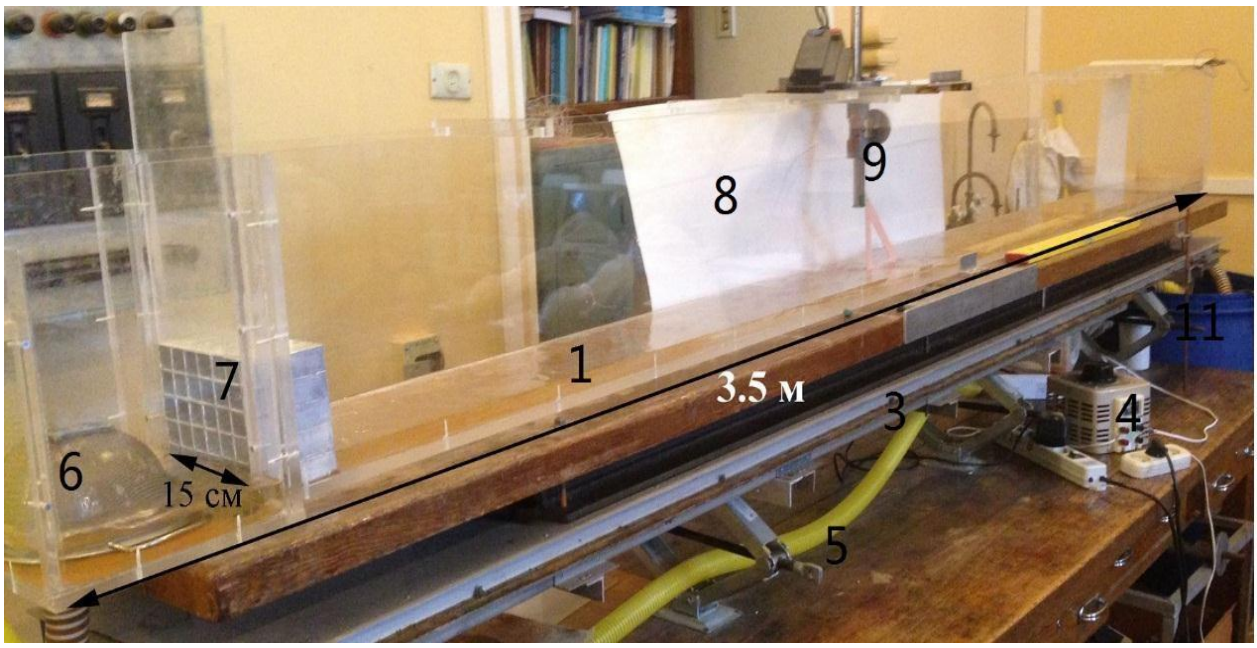


Рис. 8. Экспериментальная установка. 3. Экспериментальная платформа. 5. Шланг для подачи воды на вход в канал. 6. Гаситель возмущений на входе в канал. 7. Решетка, обеспечивающая плоскопараллельное течение на входе.

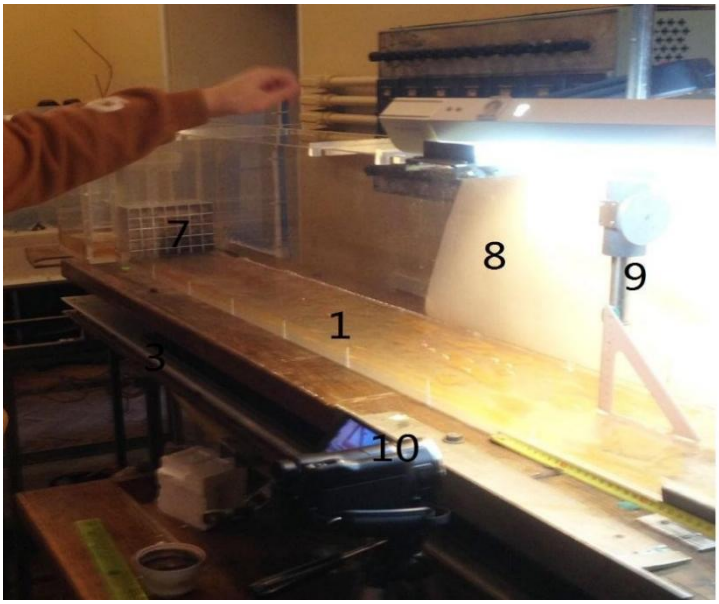


Рис. 9. Экспериментальная установка.

В эксперименте исследовались равномерные потоки, в которых градиент давления в направлении движения составлял $\partial p/\partial x = 0$, и потоки с обратным положительным градиентом давления $\partial p/\partial x > 0$, которые получались при изменении наклона дна. Расход воды в течение отдельного эксперимента не менялся во времени. Толщина слоя воды в канале составляла $2.1 < h < 3.1$ см. Максимальная (в сечении) скорость потоков в серии экспериментов менялась в диапазоне $15 < U_{max} < 40$ см·с$^{-1}$, продольный градиент скорости потока при этом был < 0.1 с$^{-1}$ по модулю. Диапазон чисел Рейнольдса, который определяется толщиной слоя воды в проведенных экспериментах, составлял $3150 < Re < 12400$, диапазон изменения расхода воды в разных экспериментах при изменении наклона дна $472.5 < Q < 1860$ см^3/с. Для исследования поля скорости использовалась видеозапись перемещения частиц полистирола плотностью $\rho = 1.05$ г/см^3 со средним диаметром 0.2 мм в потоке воды над гладкой поверхностью дна. Размер таких частиц с почти нейтральной плавучестью дает возможность отследить скорость течения в вязком слое потока толщиной порядка 2 мм. Запись велась через прозрачную боковую стенку канала из органического стекла. Скорость видеозаписи составляла 25 кадров каждую секунду. Камера устанавливалась таким образом, чтобы в фокус изображения попадала ось канала, что дает возможность в зависимости от четкости изображения отличать и использовать в обработке частицы, которые перемещаются вдали от вертикальных стенок. В качестве рабочего использовался участок длиной 15–18 см вдоль продольной оси канала. Данные видеозаписи обрабатывались с помощью программы Adobe Photoshop. В результате тщательного анализа видеозаписей были получены траектории и скорости частиц, которые одновременно перемещались вдоль рабочего участка на разных горизонтах.

Перед экспериментом резервуар заполняется водой. На дне резервуара находится насос, который подает воду в канал через шланг. На выходе шланга в канал стоит рассекатель, гасящий возмущения. Характер течения регулируется наклоном платформы, наклон регулируется домкратами, несущими платформу. Изменение скорости вдоль канала регулируется с помощью наклона канала и заслонок на входе и выходе канала, регулирующих расход воды. Эксперимент начинается после стабилизации потока воды.

Скорость потока определялась по смещению частиц полистирола от кадра к кадру. Для исследования поля скорости плоскопараллельного течения рассматривались только те частицы, треки перемещения которых имели горизонтальные траектории, направленные вдоль оси канала. Согласно работе (Мельникова, 2005), такой выбор частиц исключал учет возмущений от вихрей в этой области, скорость и траектория движения которых отличаются от скорости и линий тока основного плоскопараллельного течения (Lebon, 2018; Ahmadi, 2020). Среднее значение скорости в точке потока с координатами *x, y, z* рассчитывалось по нескольким частицам с похожими траекториями. По видеозаписи течения жидкости определялись координаты частиц на серии последовательных кадров. Обработка данных с помощью программы Adobe Photoshop позволила получить траектории и скорости частиц, одновременно перемещавшихся вдоль рабочего участка на разных высотах. Дляисследования поля скорости основного течения использовались частицы, не меняющие своего положения по вертикали.

Общая схема течения показана на рис.10. Здесь горизонтальные треки частиц нейтральной плавучести показывают ламинарный характер течения выше пограничного слоя. В качестве рабочего пространства рассматривается часть потока, на котором скорость течения не менялась в направлении движения (цифра 1), и участок, на котором скорость течения уменьшалась вдоль по потоку (цифра 2). Для обеспечения такого распределения скорости использовались встроенные домкраты, с помощью которых изменялся наклон дна канала в диапазоне 1-2° и соответственно, менялся расход воды *Q* на выходе из экспериментального канала. Из-за торможения жидкости на границе рассматриваемых зон наблюдается потеря устойчивости ламинарного течения и в пограничном слое течения вблизи дна образуются вихри (цифра 3).

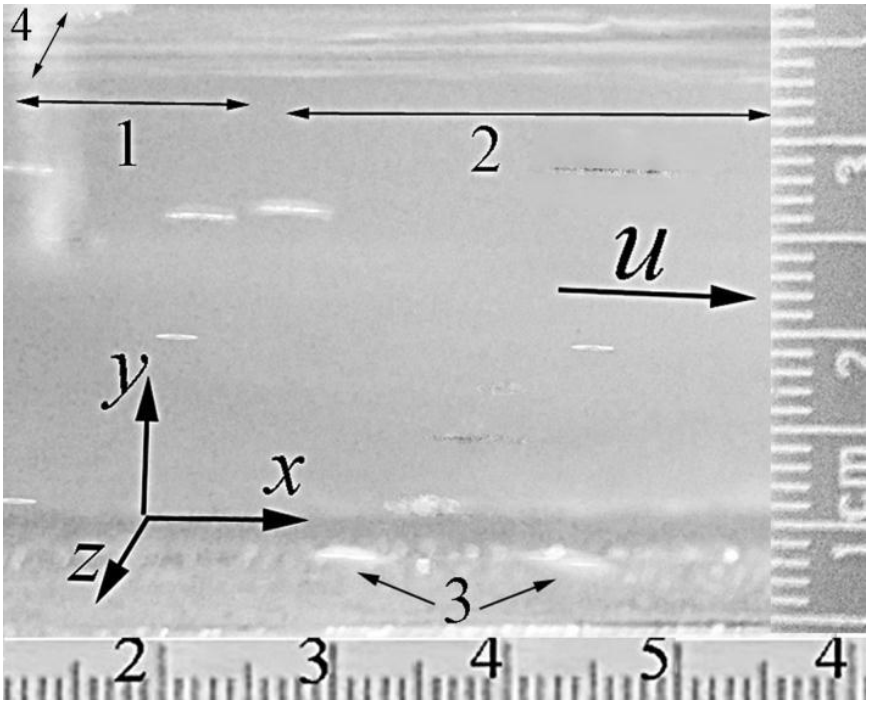


Рис. 10. Схема течения. 1 – область равномерного течения, 2 – область замедляющегосятечения, 3 – вихри в пограничном слое потока, 4 – поверхность воды.(Мельникова и др., 2021)

Для учета погрешностей лабораторных измерений и построения доверительных интервалов погрешностей применялись стандартные методы обработки экспериментальных данных с помощью распределения Стьюдента.

Пусть в результате n измерений случайной величины x, подчиняющейся нормальному распределению с параметрами $\bar{x}$ и σ получены различные значения x_1, x_2, …, x_n. Рассматривается случайная величина вида.

$$t = \frac{\bar{x}-\tilde{x}}{\tilde{\sigma}} \qquad (15)$$

Где $\tilde{\sigma}$ – среднеквадратичное отклонение результатов измерений от среднего арифметического $\tilde{x}$ в данной серии из n измерений.

Оценки влияния $\tilde{x}$ и $\tilde{\sigma}$ зависят от числа измерений n. Поэтому при числе n_1 измерений величина t принимает числовое значение t_1 , при n_2 – значение t_2 и т.д.

Стьюдент получил закон распределения (функция плотности вероятности) *Sn(t)* случайной величины ***t*.**

По распределению *Sn(t)*, по формуле (16) можно рассчитываются границы соответствующего симметричного интервала $t_{ал}$, который зависит от α и *n* (рис. 11).

$$\alpha = \int_{-t_{ал}}^{+t_{ал}} S_n(t)dt \qquad (16)$$

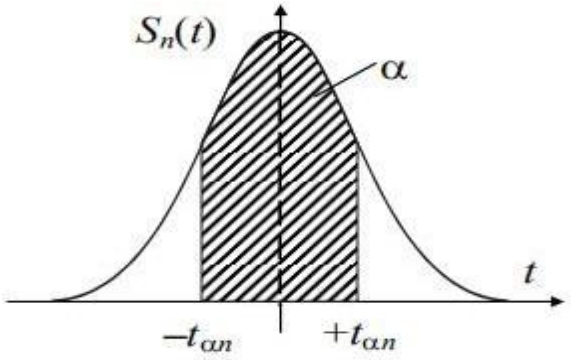


Рис.11 Распределение Стьюдента.

Значения t_{an} (***коэффициенты Стьюдента***) приведены в таблице.1 для разных значений доверительной вероятности α и количества *n* измерений.

n	α							
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
2	0.16	0.33	0.51	0.73	1.00	1.38	2.0	3.1
3	0.14	0.29	0.45	0.62	0.82	1.06	1.3	1.9
4	0.14	0.28	0.42	0.58	0.77	0.98	1.3	1.6
5	0.13	0.27	0.41	0.57	0.74	0.94	1.2	1.5
6	0.13	0.27	0.41	0.56	0.73	0.92	1.2	1.5
7	0.13	0.27	0.40	0.55	0.72	0.90	1.1	1.4
8	0.13	0.26	0.40	0.55	0.71	0.90	1.1	1.4
9	0.13	0.26	0.40	0.54	0.71	0.89	1.1	1.4
10	0.13	0.26	0.40	0.54	0.70	0.88	1.1	1.4

Таблица.1. Коэффициенты Стьюдента.

Для определения доверительного интервала случайной погрешности данных измерений использовался следующий алгоритм:

1. Оценивалось среднее арифметическое значение измеренных величин.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{17}$$

2. Вычислялось среднеквадратичное отклонение измеренных величин.

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{(\tilde{x}-x_1)^2+(\tilde{x}-x_2)^2+\cdots+(\tilde{x}-x_n)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}-x_i)^2}{n(n-1)}} \tag{18}$$

3. Задавалась доверительная вероятность α = 0,67.
4. По таблице 1 определялся коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$.
5. Определялся доверительный интервал погрешности n измерений при заданной доверительной вероятности α.

$$\Delta\tilde{x}_{\text{сл}} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma} \tag{19}$$

6. Результат записывается в виде: $X = \tilde{x} \pm \Delta\tilde{x}_{\text{сл}}$.

2.2 Лабораторное моделирование образования гряд на размываемом дне осциллирующим потоком.

Будем предполагать, что формирование гряд под длинной волной на поверхности воды определяется тем же механизмом взаимодействия потока и дна, что и в стационарном потоке с обратным градиентом давления $(dp/dx)>0$. В соответствии с работой (Мельникова, Показеев, 2018) гряды будут формироваться только в той зоне потока, где скорость течения убывает в направлении движения. В осциллирующем потоке это условие выполняется в двух фазах волны: от гребня волны до невозмущенной поверхности, где скорость потока имеет положительный знак, и от впадины волны до невозмущенной поверхности, где скорость потока отрицательна. В этих же зонах производная горизонтальной скорости по x отрицательна. Будем считать, что в указанных зонах переменные значения скорости и градиента скорости фонового потока можно заменить их средними значениями.

Эксперименты с длинной волной проводились в прямом канале из прозрачного оргстекла на кафедре физики моря и вод суши физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Иванова, Мельникова, 2023). Длина канала — 3.5 м, ширина смачиваемой области — 0.15 м. На выходе канал имеет расширение в форме прямоугольника размером 0.48×0.22 м$^{-2}$, которое обеспечивает гашение волн. Большая сторона прямоугольника перпендикулярна каналу. В экспериментах волна индуцировалась волнопродуктором плунжерного типа, с помощью которого на слое воды толщиной h = 4 см генерировались длинные волны. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 12. Перед закачкой воды в канал на его дне равномерно распределялся слой песчинок, средний диаметр которых D_{50} = 0.03 см, включался насос для подачи воды в канал через шланг, и после достижения заданной толщины воды мы ждали, пока в канале все стабилизируется. Затем с помощью волнопродуктора, генерировали длинную гармоническую волну на поверхности воды и начинали запись эксперимента на видеокамеру. Запись производилась через боковые стенки канала и непосредственно над ним, при этом скорость видеозаписи составляла 25 кадров в секунду, камера вручную фокусировалась на оси канала. Продольный градиент скорости не превышал по модулю 0.07 с$^{-1}$, размере песчинок на дне удовлетворял

значению d/D_{50} < 2000, число Фруда Fr = 0.97, параметр смещения ψ_c = 10.88, числе Шильдса θ = 1.62, числе Рейнольдса Re = 4130. Толщина вязкого слоя δ была получена в ходе наших экспериментов. В Таблице 2 приведены параметры волнового потока, полученного в эксперименте. Здесь T – период волны, C – фазовая скорость, H – высота волны.

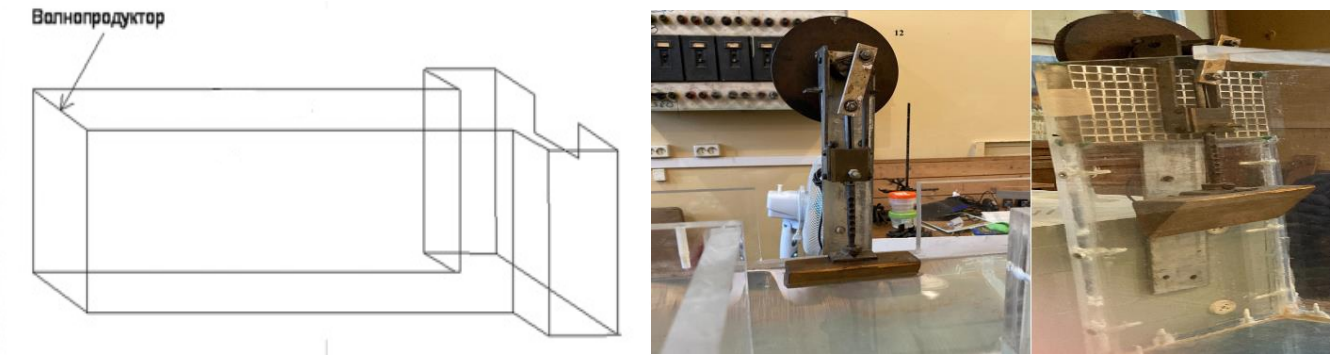


Рис. 12. Экспериментальная установка для исследования осциллирующего потока. Стрелкой указано место, где располагался волнопродуктор. Фотография волнопродуктора. (Мельникова, Ян и др., 2024)

	h, см	C, см/с	T, с	H, см	λ, см	δ, см	U_{max}, см/с	u_x, $с^{-1}$
эксп	4	62.6	0.67	0.5	42	0.5	4.0	- 0.07
Wang et al., 2019	40	198	1.50	7	300	0.3	15.4	- 0.05

Таблица. 2.

В таблице приводятся данные из работы (Wang et al., 2019), в которой авторы проводят результаты экспериментов в волновом канале. В работе исследовали механизмы взаимодействия между потоком с гармоническим волной и размываемым дном, процесс формирования донных гряд. Результаты (Wang et al., 2019) можно использовать для проверки наших гипотез.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЛАБОРАТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ИХ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ.

3.1 Результаты экспериментов в равномерном и замедляющемся потоках.

Данные, полученные в нашем эксперименте, показали, что в стационарном равномерном потоке в пограничном слое средняя скорость течения, определенная по перемещению частиц нейтральной плавучести вдоль оси канала на данном горизонте, меняется в пределах доверительного интервала 1.5 см · с $^{-1}$. Доверительный интервал получен при усреднении данных для 10 частиц на всем рабочем участке. Вертикальные профили средней скорости потока глубиной h = 3 см для двух значений U_{max} для нижней части потока приводятся на рис.13. В равномерных потоках у дна существует вязкий слой с линейной зависимостью $u(y)$. Выше вязкого слоя экспериментальные данные можно аппроксимировать экспоненциальной зависимостью $y(u)$. Все аппроксимирующие зависимости находятся в пределах доверительных интервалов экспериментальных данных (в заданном диапазоне измерений). Толщина вязкого слоя определяется точкой пересечения линий тренда: линейной функции для вязкого слоя и экспоненты для внешней части пограничного слоя. В исследованном диапазоне значений скорости (15< U_{max} <40 см · с$^{-1}$) при глубине потока h = 3 см толщина вязкого слоя составляет $\delta \approx 0.1\ h$, а скорость $u(\delta_{max}) = 0.5U_{max}$. При нормировке данных на глубину слоя воды и максимальную в сечении скорость течения вертикальные профили средней скорости равномерных потоков в канале с гладким дном подобны во всем пограничном слое.

В ходе экспериментов были получены вертикальные профили средней скорости в равномерном и замедляющихся течениях. На рис.14 приведены нормированные профили усредненной по времени скорости для двух потоков одинаковой глубины и одинаковой максимальной в сечении скорости. Один из потоков – равномерный, а второй – замедляющийся, с обратным градиентом давления. Время усреднения значений скорости на порядок превышало период процесса торможения замедляющегося потока.

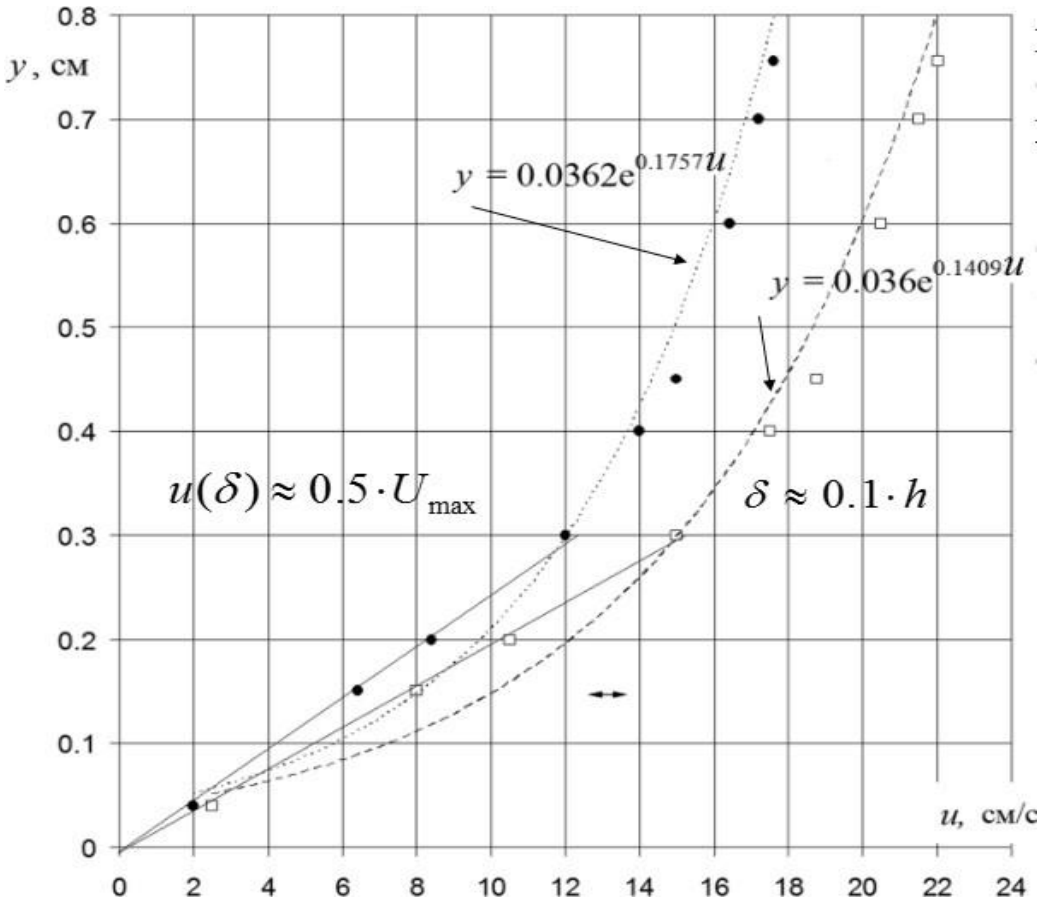


Рис. 13. Вертикальный профиль со средней скоростью 24 и 30 см/с и максимальной скоростью в поперечном сечении на глубине h = 3 см. Стрелка – доверительный интервал для вероятности 0.67 для *10* измерений. (Мельникова и др., 2021)

Экспоненциальные линии тренда экспериментальной зависимости *y(u)* для равномерного и замедляющегося течений очень близки во внешней области пограничного слоя, что показывает сходство профилей над вязким слоем. При замедляющемся потоке толщина слоя с линейным профилем средней скорости $\delta \approx 0.06 \cdot h$, эта величина меньше, чем при равномерном потоке. При равномерном потоке верхняя граница скорости течения вязкого слоя больше, чем $u(\delta_{max}) \approx 0.4 \cdot U_{max}$. Во внешних слоях замедляющийся поток имеет меньшие скорости и отклонение скорости от линии тренда выше, чем у равномерного течения на всех горизонтах.

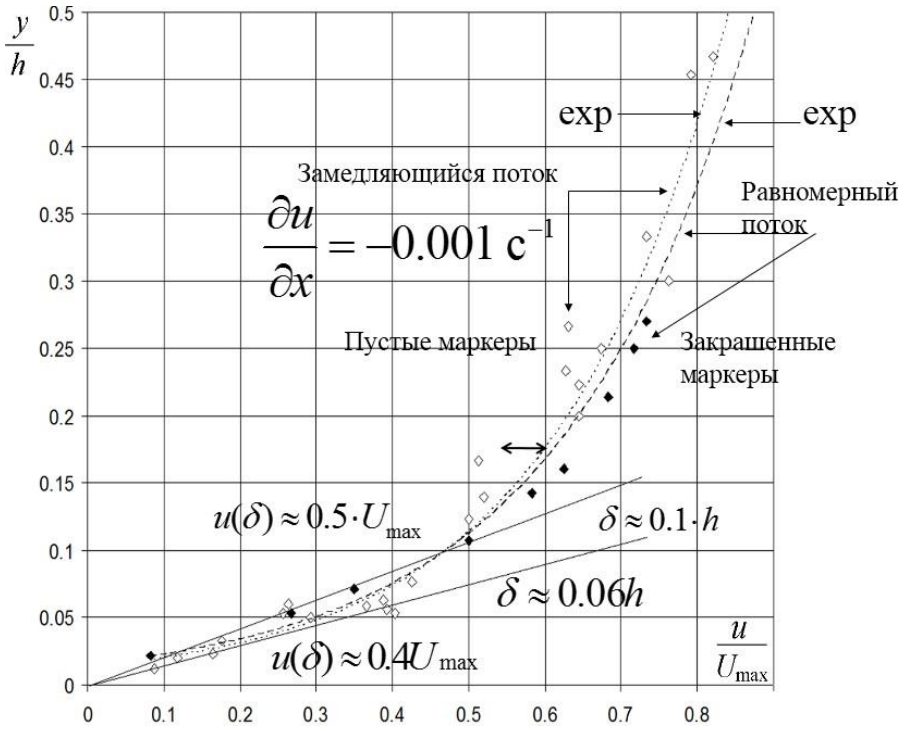


Рис. 14. Усредненный по времени профиль скорости двух потоков с одинаковой глубиной и одинаковой максимальной скоростью в поперечном сечении. Закрашенные маркеры – равномерный поток, пустые – поток с обратным градиентом давления. (Мельникова и др., 2021)

Это происходит из-за периодического торможения жидкости в потоке с обратным градиентом давления. Форма профиля в замедляющемся потоке не содержит особенностей, гарантирующих потерю устойчивости ламинарного движения. Для объяснения неустойчивости течения замедляющегося потока и формирования вихрей в фазе максимального торможения жидкости, наблюдаемого в эксперименте (Мельникова, 2005; Egorov et al., 2002), было исследовано изменение формы вертикального профиля скорости в различных фазах процесса торможения.

На рис.15 приведены зависимости *u(x)* вдоль продольной оси потока, полученные для частиц, перемещающихся на различных горизонтах, в том числе и на поверхности. Скорость жидкости определялась по смещению частиц на последовательных кадрах видеозаписи. Толщина слоя воды составляла h = 3 см, U_{max} = 24 см·с$^{-1}$, $\partial u/\partial x \approx -0.1$ с$^{-1}$ на свободной поверхности.

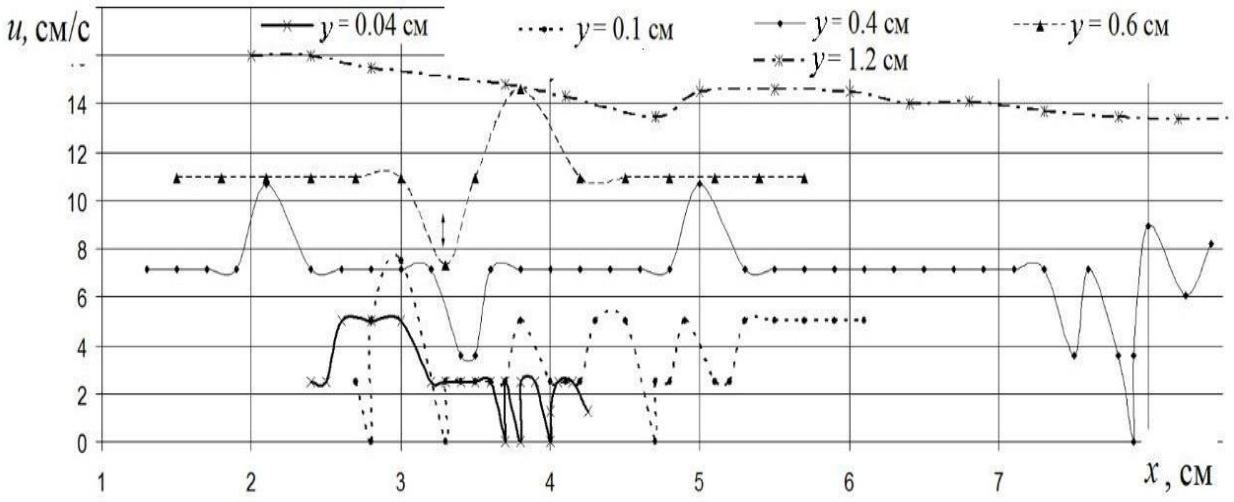


Рис. 15. Зависимость *u(x)* частиц, движущихся на разных горизонтах вдоль продольной оси потока. (Мельникова и др., 2021)

При $y > 0.8$ см поток воды имеет ламинарное движение. В слое при $y < 0.6$ см на всех горизонтальных поверхностях в двух областях ($2<x<5$ см и $7<x<8$ см) были зарегистрированы периодические уменьшения скорости потока. Ниже по течению наблюдались локальные максимумы скорости после отрыва вихря. Максимальные флуктуации скорости наблюдались в слоях $0.1 < y < 0.6$ см и $0.03< y < 0.20$.

Необходимо исследовать зависимость *u(x)* в начале процесса торможения и на этапе максимального торможения. Для рис.16 для каждой координаты x значения скорости частиц усреднялись по 10 процессам торможения для соответствующей фазы ($0.1 < y < 0.6$ см). Процесс торможения начинается при $x > 2.5$ см с производной $\partial u/\partial x \approx -0.1 c^{-1}$, а скорость потока остается постоянной вдоль оси x при $x < 2.5$ см. Скорость жидкости уменьшается на правой стороне границы $x > 2.5$ см и очень мало изменяется на левой стороне границы. В результате в фазе максимального торможения в начале участка замедления течения формируется максимальный перепад значений скорости, а на профиле формируется локальный минимум.

Глубина минимума скорости на данном горизонте меняется периодически с интервалом времени 0.6 с. Производная скорости по горизонтальной координате достигает экстремальных значений $\partial u/\partial x \approx -8$ c^{-1}, превышая по модулю значения этой величины в начале процесса торможения жидкости ($\partial u/\partial x \approx -0.1 c^{-1}$) на порядок.

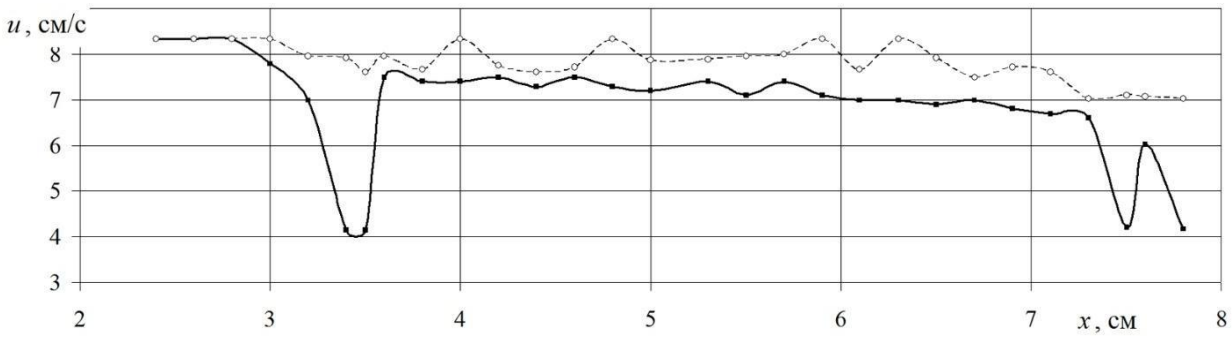


Рис. 16. Продольный профиль скорости потока на начальной стадии (пунктирная линия) и стадии максимального торможения жидкости в потоке с обратным градиентом давления. (Мельникова и др., 2021)

Используя данные о скорости частиц, перемещающихся на разных горизонтах, можно построить вертикальный профиль скорости в начальной фазе и в фазе максимального торможения жидкости. На рис.17 приведены вертикальные профили средней скорости, соответствующие начальной и максимальной фазе торможения. Оба профиля получены в начале участка торможения жидкости x = 3 см, где обнаружен локальный минимум скорости. Максимальная скорость течения составляла U_{max}= 24 см·с$^{-1}$, толщина слоя воды 3 см, $\partial u/\partial x \approx -0.1$ с$^{-1}$ на поверхности воды в начале цикла торможения. Нормировка выполнена на максимальную скорость течения на поверхности воды и на глубину потока h.

На врезке показан вихрь, сформированный выше вязкого слоя между точками перегиба. На профилях, полученных в начальной фазе торможения, экспериментальные данные очень хорошо согласуются с экспоненциальной линией тренда над вязким слоем и с линейной функцией *u(y)* для вязкого слоя вблизи дна канала. Вертикальный профиль скорости потока в фазе максимального торможения потока, в слое расположенном над вязким слоем в координатах $0.04 < y/h < 0.2$, деформируется. Над вязким слоем при $y/h < 0.2$ экспериментальный профиль существенно отличается от экспоненциальной линии тренда.

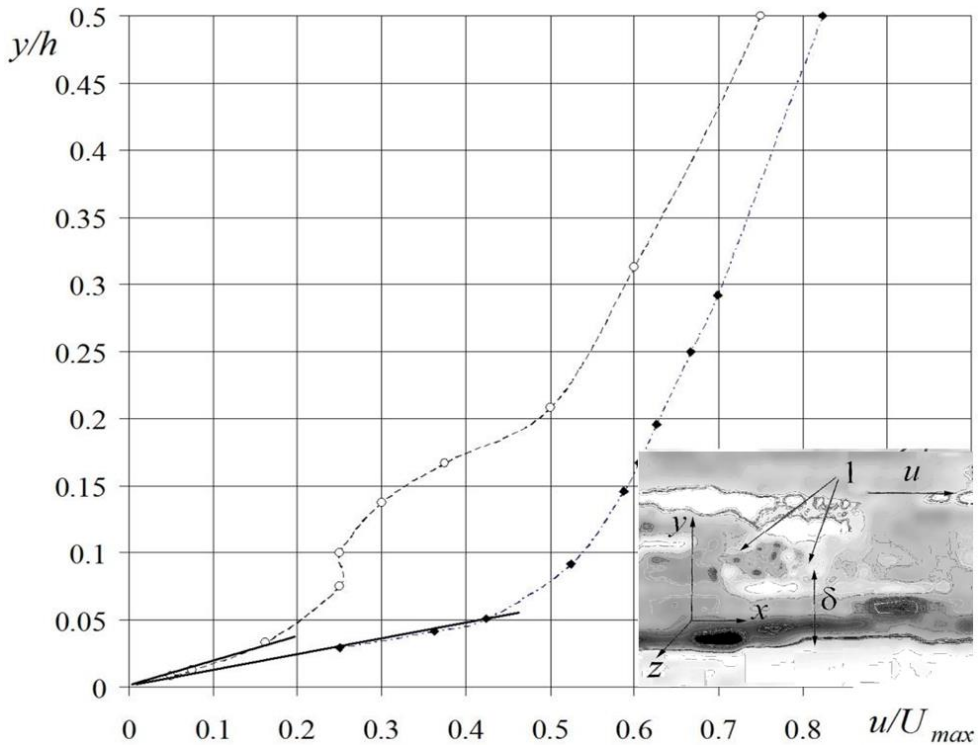


Рис. 17. Профили скорости течения в фазе максимального торможения потока (пустые маркеры) и в начальной фазе (закрашенные маркеры). Штриховые линии аппроксимируют экспериментальные данные. Сплошные линии – линейный профиль в вязком слое. На врезке – фотография образования вихря (δ – толщина вязкого слоя. 1– вихрь).(Мельникова, Ян, 2022)

В этом слое на профиле возникает локальный минимум скорости потока с двумя точками перегиба в координатах $y \approx 0.08h$ и $0.16h$. Нижние точки перегиба находятся там, где производная второго порядка от скорости потока меняет знак, а производная первого порядка имеет минимум. Как показано на рис.17, в ходе эксперимента было зафиксировано формирование цилиндрического вихря, как только в профиле появился локальный минимум скорости. На рис.17 показан кадр из видеозаписи формирования вихря на верхней границе вязкого слоя. Во время формирования вихря белые частицы полистирола нейтральной плавучести, которые используются для визуализации, захватываются вихрем. Образование вихря указывает на потерю устойчивости в ламинарном движении.

Слой жидкости, где скорость течения минимальна, можно разделить на вертикальном профиле скорости на два подслоя, каждый из них содержит точку перегиба с нижним $0.04 < y/h < 0.14$ и верхним $0.14 < y/h < 0.23$. В этом случае

устойчивость ламинарного течения в каждом подслое можно оценить по форме вертикального профиля скорости потока (Дикий, 1976). В соответствии с данными, приведенными на рис.15, скорость течения монотонно увеличивается вдоль оси y во всем слое (0, h). Первая производная функции $u_y(y)$ имеет минимум в нижней точке перегиба и максимум в верхней точке перегиба (рис.17). Для этого типа течений получен ряд теорем, позволяющих по форме профиля скорости оценить устойчивость ламинарного движения (Дикий, 1976; Дразин, 2005). К подслою, содержащему нижнюю точку перегиба применимо условие теоремы Фьортофта (Fjortoft, 1950; Дикий, 1976; Дразин, 2005), согласно которой устойчивость ламинарного движения к малым возмущениям гарантируется, если первая производная скорости по вертикальной координате имеет минимальное значение в точке перегиба профиля скорости. Для подслоя, содержащего верхнюю точку перегиба, выполнены условия теоремы Розенблюта-Симона (Rosenbluth, Simon, 1964; Дикий, 1976; Дразин, 2005). Эта теореме дает необходимое и достаточное условие устойчивости плоскопараллельного течения в том случае, если первая производная скорости по вертикальной координате имеет максимальное значение, а следующее выражение имеет отрицательный знак.

Запишем условие устойчивости Розенблюта-Симона (при необходимой замене переменных), приведенное в 1 главе (см. выражение (7)), в виде:

$$-\frac{dy}{dU}\cdot\frac{1}{U-U_d}\Big|_{U(y_1)}^{U(y_2)}+\int_{U(y_1)}^{U(y_2)}\frac{d^2y}{dU^2}\cdot\frac{dU}{U-U_d}<0 \qquad (20)$$

где U – скорость плоскопараллельного течения, U_d – скорость потока в точке перегиба, $U_{(y1,\,y2)}$ – скорость потока на границе нижнего и верхнего подслоев.

Если знак выражения (7) положительный, тогда течение неустойчиво. Для того, чтобы проверить устойчивость течения в фазе максимального торможения в слое, который содержит верхнюю точку перегиба, были использованы экспериментальные данные, полученные в потоке глубиной h = 3 см и скоростью течения на свободной поверхности U_{max}=30 см/с, представленные на рис.18. Зависимость вертикальной координаты *y(u)* для верхнего подслоя аппроксимируется полиномом:

$$y = a\,U^3 + b\,U^2 + cU + d \tag{21}$$

Здесь a=0.0029 с^3/см^2, b=0.1068 с^2/см, c=1.318 с, d=4.9153 см.

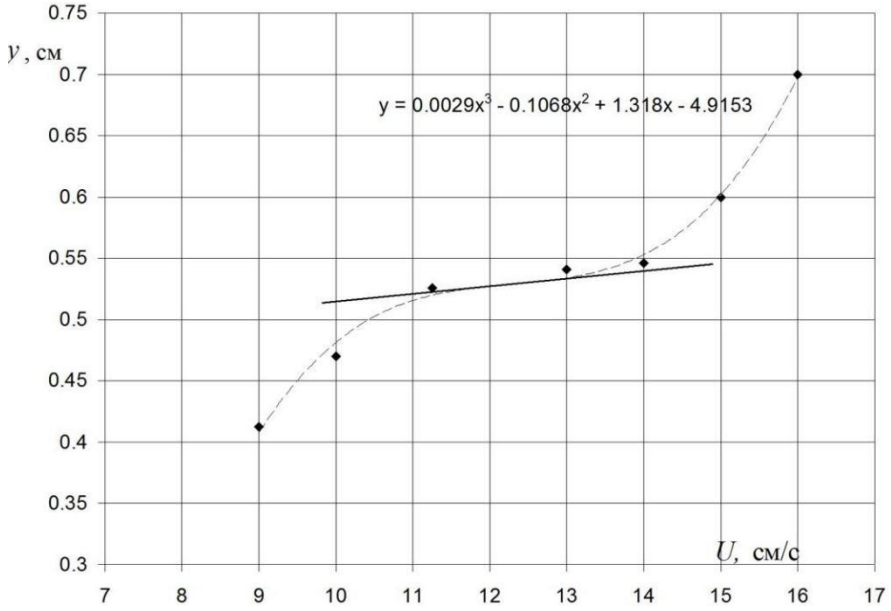


Рис. 18. Зависимость скорости потока и вертикальной координаты *y(u)* в подслое, содержащем верхнюю точку перегиба. Экспериментальные данные (маркеры), линия тренда (штриховая линия), касательная в точке перегиба (сплошная линия). (Мельникова, Ян, 2022)

Основные параметры, входящие в выражение (20), составляют $U(y_1)$ = 9 см/с, $U(y_2)$ = 16 см/с, U_d = 12.3 см/с, координаты y_1 = 0.41 см, y_2 = 0.7 см, точки перегиба y_d = 0.54 см. Проверим, выполняется ли условие устойчивости (20) с использованием аппроксимирующего выражения (21).

Из (21) получаем:

$$y' = 3aU^2 + 2b + c$$

$$y'' = 6aU + 2b$$

$$y'' = 0 \rightarrow U = U_d = -\frac{a}{3b}$$

$$\frac{y''}{U-U_d}=\frac{6aU+2b}{U-U_d}$$

$$\lim_{U\to U_d}\frac{y''}{U-U_d}=6a\frac{U+\frac{b}{3a}}{U+\frac{b}{3a}}=6a$$

Толщину слоя выбираем таким образом, чтобы значение производной y'совпадало на нижней и верхней границах: тогда значения скорости на границах удовлетворяют условию $U(h_2)=-U(h_1)-\frac{2b}{3a}$. Если скорость на нижней границе слоя равна $U(y_1)=$ 9 см/с то на верхней границе $U(y_2)=$ 15,6 см/с перепад скорости в зоне минимума $\Delta U=$ 6.6 см/с, а значение производной y' на границах слоя равно $y'=$ 0.103 с. Для левой части критерия (20) получаем:

$$I_1=-\frac{2Y'}{\Delta U}$$

и $I_1=$ −0.0312 с^2/см.

В правой части критерия (20) под интегралом существует неопределенность типа 0 делить на 0 в точке перегиба, поэтому мы ее раскрываем и получаем предел при стремлении U к U_d. Этот предел равен $6a$ = 0,0174. Для правой части интеграла получаем

$$I_2=6a\Delta U$$

И условие потери устойчивости можно записать:

$$-\frac{2Y'}{\Delta U}+6a\Delta U>0$$

$$Y'<3a(\Delta U)^2$$

Для приведенных данных $y' = 0.103$ с, а правая часть неравенства равна $3a(\Delta U)^2 = 0.379$ с. (Ян, 2020; Мельникова и др., 2020). Таким образом, условие потери устойчивости выполнено.

Однако надо учесть, что приведенные критерии устойчивости получены для профилей с одной точкой перегиба. Тем не менее, полученный вывод подтверждает эксперимент – наша видеозапись, кадр которой приведен на врезке рис.17. На кадре видно, что вихрь сворачивается выше вязкого слоя, толщина которого обозначена символом δ. Сходные результаты экспериментов были получены ранее в работе (He et al, 2013). На рис.19 приведен кадр видеозаписи из работы (He et al, 2013).

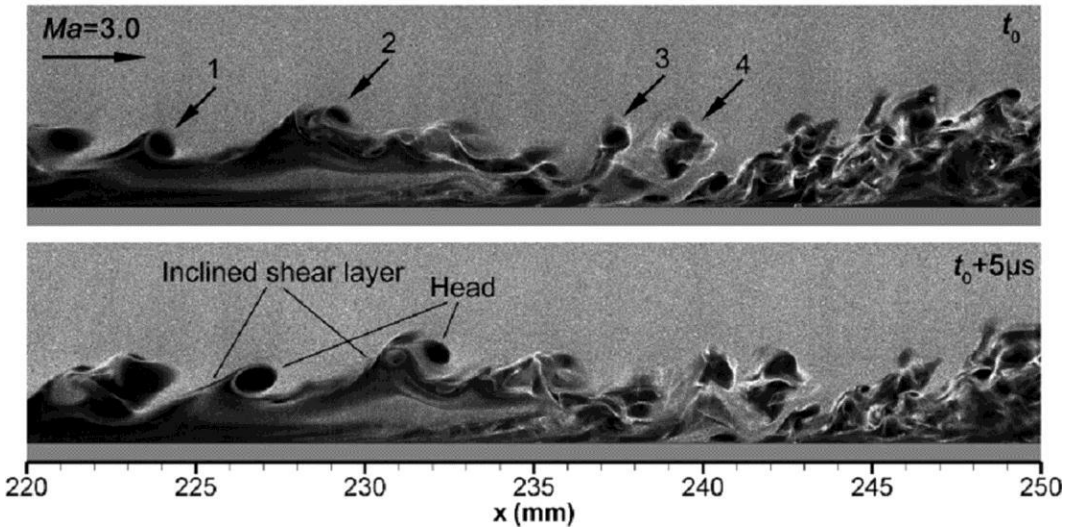


Рис. 19. Генерация вихрей выше вязкого слоя (x<235 мм) в потоке с обратным градиентом давления. (He et al, 2013)

Из приведенных данных следует, что вихри в зоне генерации (x<235мм) образуются выше вязкого слоя, толщина которого возрастает в направлении движения в потоке с обратным градиентом давления.

Оценим силы, действующие на единичный объем жидкости на границе равномерного и замедляющегося течений. Вихрь формируется на начальном участке зоны торможения течения, где наблюдается локальный минимум функции $u(x)$, глубина которого увеличивается со временем. Когда производная скорости $\partial u/\partial x$ достигает минимального значения $\partial u/\partial x \approx -8$ с$^{-1}$, течение тормозится, образуется вихрь. Возникает вопрос о причинах возникновения зоны резкого торможения жидкости на

границе участков равномерного и замедляющегося течений в придонном слое толщиной примерно 2δ. Можно предположить, что в этом слое, где формируется локальный минимум скорости, силы торможения, действующие на малый объем жидкости, имеют максимум.

Рассмотрим небольшой объем жидкости массой m и высотой δ, который движется вдоль оси x в заданной горизонтальной плоскости в области торможения потока, и получим зависимость между обратным градиентом давления и силой трения. Уравнение движения и интеграл движения для течения с постоянной завихренностью можно записать в виде.

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{dp}{dx} + F_{fr}, \qquad p = -\rho_0[gy + (u_0 x) + \frac{1}{2}(u)^2 - X\Psi] \tag{22}$$

где Ψ – функция тока возмущений, u_0 – скорость на нижней границе слоя, ρ_0 – плотность малого объема жидкости, X– потенциал в направлении x.

Значения скорости в начале и конце зоны торможения известны. Сила горизонтального касательного напряжения $F_{fr} = -\mu u_y S$ определяет силу трения, где μ – динамическая вязкость жидкости, а S – площадь горизонтальной поверхности объема. Тогда выражение для ускорения единицы объема жидкости (торможение) за счет трения между слоями можно записать как:

$$a_{fr} = \frac{F_{fr}}{m} = -\frac{v}{\delta} u_y \tag{23}$$

где δ –толщина вязкого слоя.

Используя уравнение (22), можно получить горизонтальную составляющая градиента давления.

$$\frac{1}{m}\frac{dp}{dx} = -u \cdot u_x - \frac{\partial u_0}{\partial t} \tag{24}$$

Из (23)-(24) получаем выражение для ускорения единицы объема:

$$\frac{du}{dt} = u \cdot u_x + \frac{\partial u_0}{\partial t} - a_{fr}, a_{fr} = \frac{v}{\delta} u_y \tag{25}$$

Полученное выражение (25) позволяет с привлечением данных наших экспериментов, оценить относительный вклад составляющих механизма торможения: обратного градиента давления ($u \cdot u_x$) и трения (a_{fr}).

В начале торможения трение играет основную роль в вязком слое (максимальная интенсивность торможения), в верхнем подслое вклады трения и обратного градиента давления сравнимы и на порядок меньше, чем трение в вязком слое, а во время торможения вклад обратного градиента давления быстро растет по мере уменьшения скорости и увеличения граничных производных равномерного и замедляющегося сегментов. Как видно из рис.20, вклад градиента обратного давления больше, чем сила трения в подслое, содержащем верхнюю точку перегиба, в фазе максимального торможения.

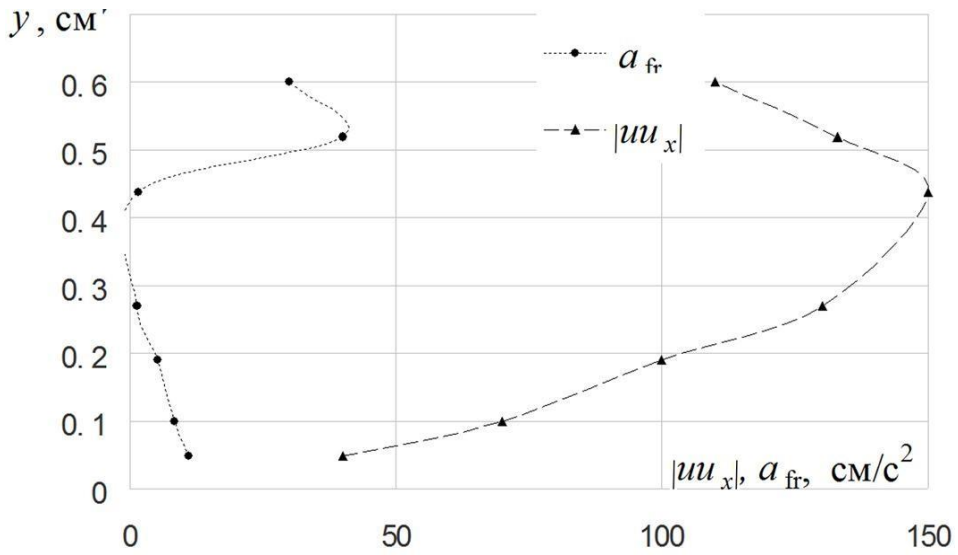


Рис. 20. Компоненты сил обратного градиента давления $|u \cdot u_x|$ и трения (a_{fr}) в фазе максимального торможения жидкости на границе участков равномерного и замедляющегося течений. (Мельникова и др., 2021)

Оценим время, необходимое для достижения критической разности скоростей. Пренебрегая вкладом трения для зоны максимального торможения, можно записать $\frac{du}{dt} \approx u \cdot u_x$.Отсюда получаем, что на границе зон равномерного и замедляющегося течений скорость объема воды снижается за малый интервал времени Δt до величины.

$$u_1 = u_0 exp(u_{x0}\Delta t) \quad (26)$$

где u_{x0} – производная продольной скорости в начале торможения.

Если считать u_{x0} заданной, тогда изменение скорости за n равных и малых интервалов в Δt составит:

$$u_n = u_0 exp(\Delta t \sum_{i=0}^{n} u_{xi}) \quad (27)$$

Для малого интервала Δt можно предположить, что $u_{xi} \approx 2\frac{u_i - u_0}{\Delta t(u_0 + u_i)}$. Когда перепад скорости $u_0 - u_i$ на границе участков равномерного и замедляющегося течений достигнет значения, при котором выполняется критерий Розенблюта-Симона (20), можно ожидать потерю устойчивости ламинарного течения.

Из принятых выше допущений следует, что период процесса торможения равен $T = n\Delta t$. Рассчитаем период торможения по нашим экспериментальным данным. Интервал Δt времени положим равным 0.04 с (интервалу времени между последовательными кадрами. В эксперименте в фазе максимального торможения (конец цикла) перепад скорости в верхнем подслое составил 6.6 см/с. Такому значению соответствует $9 < n < 10$ и период T = 0.38 с. Среднее значение периода вылета вихрей в эксперименте составил 0.45 с, доверительный интервал для вероятности 0.67 равен 0.1 с.

Для замедляющейся жидкости в выражении (25) $u_x < 0$, $u_t < 0$. Максимальная интенсивность торможения в начале процесса приходится на вязкий слой, основной вклад обусловлен силой трения. Выше вязкого слоя на координате $y/h \approx 0.2$ вклады силы трения и обратного градиента давления в торможение равны и составляют примерно 5 - 6 см/с^2. В процессе торможения вклад обратного градиента давления в торможение жидкости быстро растет, так как растет перепад скорости и производная u_x на границе участков с равномерным и замедляющимся течением (рис. 20).

Рассмотрим показанные на рис. 20 зависимости основных компонент замедления течения от вертикальной координаты, полученные в фазе максимального торможения жидкости. В этой фазе максимум интенсивности торможения течения смещается из вязкого в слой с экспоненциальной зависимостью *y(u)* и лежит на координате *y* = 0.5 см или $y/h \approx 0.17$. Максимум обусловлен как обратным градиентом давления, так и силой

трения. Положение максимума силы трения совпадает с положением максимума производной u_y на координате верхней точки перегиба $y/h \approx 0.18$.

Вклад обратного градиента давления в три раза больше, чем вклад трения, что обусловлено быстрым ростом производной u_x на границе равномерного и тормозящегося течения (рис.20). При этом увеличение u_x приводит к росту обратного градиента давления, что обеспечивает положительную обратную связь между ними. В результате в узкой зоне оси *x* на границе равномерного и тормозящегося течений (рис.20) возникает локальный минимум функции *u(x)*, а на вертикальном профиле скорости *y(u)* появляются минимум и две точки перегиба. Это приводит к потере устойчивости плоскопараллельного течения в подслое, содержащем верхнюю точку перегиба, и формированию вихря. Вихрь возникает при критическом значении ускорения силы обратного градиента давления $|uu_x| \approx 150$ см/с^2.

3.2 Результаты эксперимента с осциллирующим потоком.

Сравнение прогнозируемых параметров гряд, полученных на основе эмпирических формул, с данными экспериментов показывает, что геометрические характеристики гряд не могут быть предсказаны на основе только одного безразмерного параметра. Однако в эмпирических формулах, которые можно найти в литературе, для простоты используется один параметр. Обилие предикторов, использующих различные параметры, а также значительные отклонения между прогнозами, которые они дают, говорят о том, что проблема прогнозирования характеристик гряд, сформированных волнами, еще далека от окончательного решения. Основной причиной является отсутствие надежной физической модели взаимодействия осциллирующего потока жидкости с размываемой подстилающей поверхностью. Известные модели основаны на линейном анализе устойчивости ламинарного движения осциллирующего потока к бесконечно малым синусоидальным возмущениям на донной поверхности (Blondeaux et al., 2014). Результаты такого анализа в некоторых случаях позволяют предсказать потерю устойчивости, но не дают размеров новых форм устойчивых возмущений – гряд, которые можно зафиксировать в эксперименте. Решение нелинейной задачи определяется формой конечных возмущений, которая задается заранее. При таком

подходе можно искать наиболее опасные для устойчивости ламинарного движения возмущения.

Для расчета параметров гряд на дне канала под волной воспользуемся результатами (Мельникова, Показеев, 2018). В работе получено полуэмпирическое выражение, связывающее расстояние между вихрями S_{ed} и период формирования T_{ed} со следующими параметрами стационарного потока: скоростью течения в однородной части вертикального профиля $u(y)$, производной скорости по оси x $u_x = \partial u/\partial x < 0$, скоростью течения на верхней границе вязкого слоя δ в начальный момент времени $u_\delta(0)$, безразмерным коэффициентом трения C_f:

$$S_{ed} = T_{ed}\frac{u_\delta}{5} - \frac{\delta}{2C_f}ln(1 + u_\delta\frac{2C_f}{25|u_x|\delta}), \quad T_{ed} = (\frac{2\delta}{u_\delta|u_x|C_f})^{1/2}\text{arctg}(\frac{\frac{u_\delta}{5}}{\sqrt{\frac{2C_f}{u_\delta|u_x|\delta}}}) \tag{28}$$

В осциллирующем потоке скорость течения определяется орбитальным движением единичного объема жидкости на поверхности воды. Амплитуду орбиты такого единичного объема жидкости можно определить по следующему выражению:

$$d = 2a = \frac{H}{sh(kh)} \tag{29}$$

где a – амплитуда орбиты, λ – длина волны, h – глубина слоя жидкости с невозмущенной поверхностью, k=2π/λ – волновое число. Горизонтальная составляющая скорости (Мельникова, 2006) на поверхности воды в фиксированный момент времени равна

$$U_{\text{гор}} = U_{max}cos(kx) = \frac{KH\sqrt{gh}}{2sh(kh)}cos(kx), U_{max} = akC \tag{30}$$

где H – высота волны на поверхности воды, $C = \sqrt{gh}$ фазовая скорость длинных волн. Можно предположить, что в заданный момент времени в фазах волны, в которых скорость орбитального течения убывает в направлении движения (при положительном и отрицательном знаке скорости течения), в придонном слое будут формироваться цепочки вихрей, вытянутых вдоль поперечной оси. Вихри в зоне отрыва будут

захватывать и уносить песок, формируя цепочку канавок. Если предположение верно, то расстояние между вихрями будет равно расстоянию между канавками $S_{ed} = S$ и может быть рассчитано по (28).

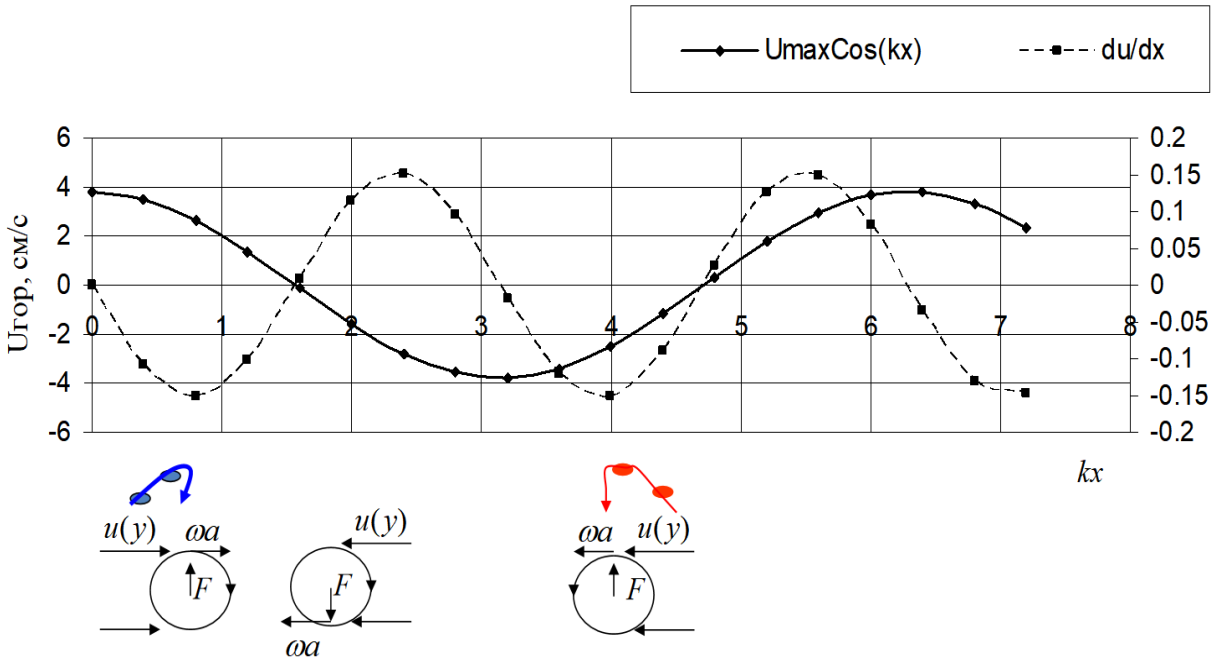


Рис. 21. Горизонтальная составляющая скорости как функция фазы волны. (Мельникова, Ян и др., 2024) Схема смещения вихрей при воздействии фонового потока (1 – подъем вверх, 2 – спуск к поверхности, 3 – подъем вверх)

Как видно из рис.21, изменение горизонтальной скорости течения показывает, что на первом этапе течение (слева направо) замедляется. В ходе этого процесса в нижнем пограничном подслое постепенно достигается максимальная стадия торможения. В это время появляется вихрь, увлекающий частицы песка вращаться по часовой стрелке и двигаться вверх. Когда горизонтальная скорость течения уменьшается до нуля и поток начинает ускоряться в противоположном направлении, чтобы войти во второй этап движения, вихрь достигает высокой точки, и знак давления меняется из-за изменения знака скорости фоновой течения. Вихрь начинает опускаться (сохраняя вращение по часовой стрелке), и он теряет частицы песка на дне. Скорость жидкости уменьшается в противоположном направлении (справа налево), чтобы войти в третий этап. В это время в нижнем пограничном

подслое также появляется вихрь, увлекающий частицы песка в движение вверх против часовой стрелки. На четвертом этапе, из-за положительного ускорения скорости течения, знак давления вихря меняется, и он начинает вращаться против часовой стрелки, опускаясь и теряя частицы песка, завершая цикл.

В соответствии с предложенной гипотезой для данного момента времени вихри могут формироваться в первую и третью четверть фазы, где производная $u_x < 0$. Для расчетов параметров цепочки вихрей были взяты максимальное значение орбитальной скорости $u = 4$ см/с и среднее значение производной скорости $|u_x| = 0.07$ с$^{-1}$. Остальные параметры, входящие в (28): $C_f = 0.2$ для используемых в эксперименте песчинок со средним диаметром $D_{50} = 0.03cm$, значение $u_\delta = 0.5U_{гор}$ получено в (Мельникова и др., 2021; Мельникова, Ян, 2022). Расчет по (20) дал значение $S_{ed} = 1.1$ см, а период формирования цепочки вихрей $T_{ed} = 3.9$ с.

В эксперименте был зафиксирован процесс формирования цепочки вихрей над первоначально ровным дном при прохождении волны (рис. 22).

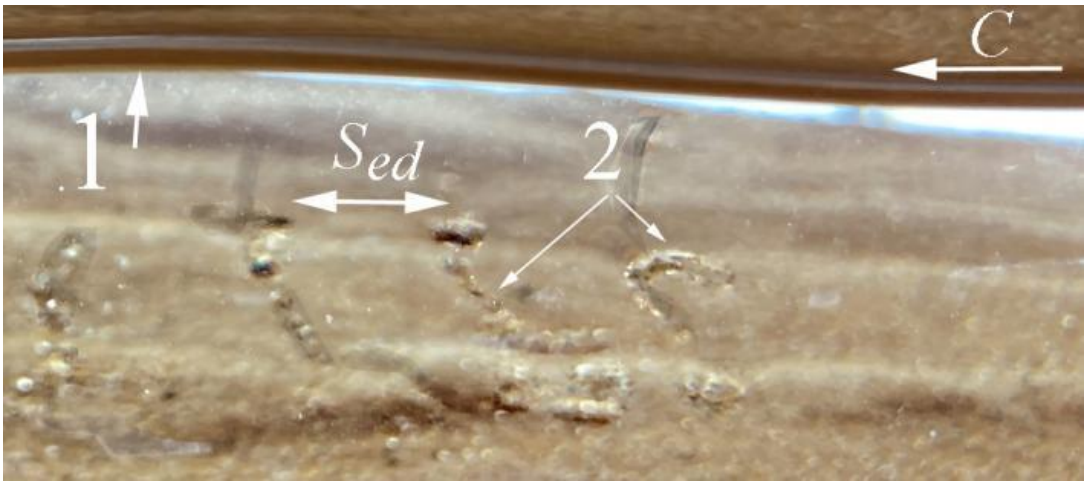


Рис. 22. Подъем вихрей с захваченным песком при прохождении первой четверти фазы волны. 1 – поверхность воды. 2 – вихревые нити.С – фазовая скорость длинных волн. $S_{ed} = 1.1$ см. (Мельникова, Ян и др., 2024)

В зоне отрыва вихрей на размываемом дне возникали параллельные канавки, вытянутые вдоль поперечной координаты z. Усредненное значение расстояния между канавками $\bar{S} = 1.2$ см (рис.23). Хорошее соответствие расчетных и экспериментальных

значений $S_{ed} \approx \bar{S}$ в (в пределах доверительного интервала 0.2 см для доверительной вероятности 0.67) подтверждает сделанное предположение.

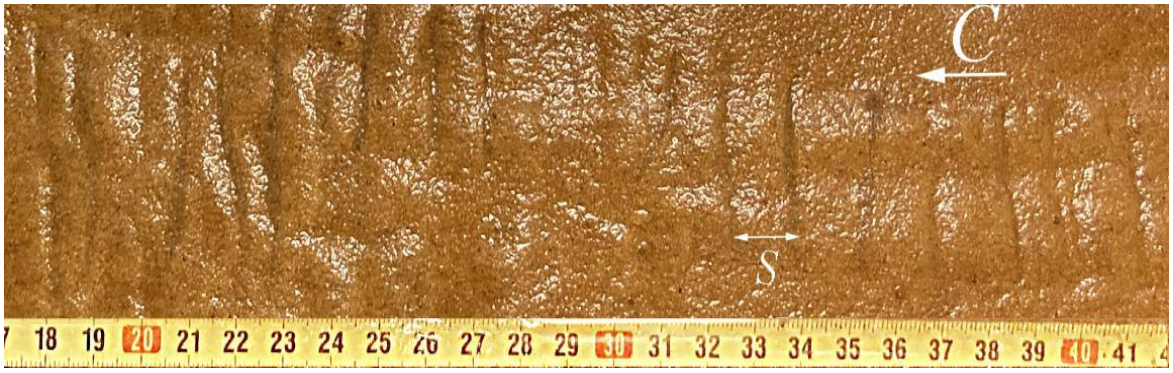


Рис. 23. Начальные гряды в эксперименте. *S* = 1.2 см. Вид сверху (Мельникова, Ян и др., 2024)

Для осциллирующего течения мы получили процесс формирования насыпи, при котором вихри не остаются в зоне формирования у дна, а двигаются по циклоиде под действием силы давления со стороны фонового потока, поднимаясь вверх в положительном направлении оси *y*. Вихри, вращающиеся по часовой стрелке, смещаются в положительном направлении оси *x*. Вихри, вращающиеся против часовой стрелки, образованные в зоне отрицательной орбитальной скорости, смещаются в отрицательном направлении оси *x*. Параметры движения вихря описываются соотношениями (Мельникова, 2005):

$$\eta = -\frac{\mu u_\delta}{5\omega} sin(\mu t), \zeta = (\frac{\partial u}{\partial y} - \omega)\eta$$

$$|\omega| = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2u_\delta}{5\delta}, \mu = \sqrt{\left|(\frac{\partial u}{\partial y} - \omega)\omega\right|} = \sqrt{3}\frac{2u_\delta}{5\delta} \qquad (31)$$

где ζ и η – горизонтальная и вертикальная координаты центра вихря, ω угловая скорость вихря, μ - скорость вихря при входе в слой.

Вертикальная скорость вихря меняет знак в момент $t_1 = \frac{\pi}{2\mu} = 0.5$ с в точке максимального подъема. Однако вихрь не успевает ее достигнуть, так как оказывается

в зоне смены знака фонового течения через четверть периода волны в момент $t_2 = \frac{T}{4} = 0.17$ с. Как показано на схеме в нижней части рис.24, смена знака скорости фонового потока приводит к смене знака силы давления на вихрь со стороны окружающей жидкости. В результате вихрь устремляется вниз к подстилающей поверхности, где теряет песок, захваченный в зоне формирования (рис. 24).

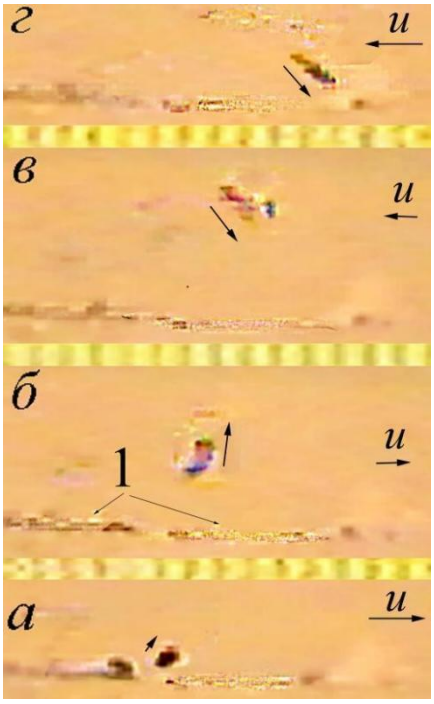


Рис. 24. Траектория вихря. Кадры видеозаписи, интервал времени 0.08 с, *u* – направление скорости фонового потока, 1 – поверхность песка, стрелки показывают направление скорости вихря, деления шкалы – 0.1 см (Мельникова, Ян и др., 2024)

Вихри переносят захваченный в зоне формирования песок и теряют его в зоне приземления, образуя насыпь между соседними канавками, которая меняет распределение скорости вдоль оси *x*. Зона максимального торможения течения совпадает с положением канавки, сформированной первым вихрем. При смене знака фонового течения жидкость натекает на насыпь и в зоне расширения потока над канавкой формируется новый вихрь. Возникает система с положительной обратной связью, которая обусловливает рост гряд, сохраняя первоначальный их размер на начальной стадии формирования. Данные эксперимента показали, что положение

начальных канавок остается неизменным, пока высота гряд, не достигнет толщины вязкого слоя δ. Этот результат подтверждается экспериментальными данными, приведенными в работе (Wang et al., 2019), в которой исследовалось формирование гряд на первоначально ровном дне, на которое наносились мелкие бороздки. При воздействии длинных волн на песке формировались гряды, геометрия которых определялась только параметрами волны и не зависела от формы начальных бороздок. В (Wang et al., 2019) приведены характеристики волн, формирующих гряды, представленные в таблице 2 (см. выше). Данные позволили провести расчеты характеристик вихрей по (29) для работы (Wang et al., 2019) и сравнить их с формой возникших гряд. Расчет позволил получить расстояние между вихрями S_{ed} = 3.64 см, расстояние между грядами, зафиксированное в эксперименте S = 3.34 см. Хорошее соответствие наших расчетов с экспериментальными данными (Wang et al., 2019) подтверждает предлагаемую гипотезу(связывающая формирование параллельных гряд на песке с воздействием цепочки вихрей, возникающей в придонном слое в зоне торможения течения в первой и третьей четверти фазы волны).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Предложенная экспериментальная методика позволила изучить поле скорости в пограничном слое равномерных потоков и потоков с обратным градиентом давления в прямом канале с гладким дном. Показано, что вертикальные профили скорости, осредненной на больших временах, имеют линейную зависимость скорости от вертикальной координаты в придонном слое равномерных и замедляющихся потоков и экспоненциальную зависимость $y(u)$ выше этого слоя. Толщина слоя с линейным профилем скорости и скорость на верхней границе этого слоя максимальны в равномерных потоках и уменьшаются в замедляющемся потоке.

В пограничном слое замедляющегося потока течение имеет циклический характер – периодически жидкость тормозится. Процесс торможения имеет наибольшую интенсивность на границе равномерного и замедляющегося течения, где производная u_x быстро растет, обеспечивая положительную обратную связь с обратным градиентом давления. В фазе максимального торможения в слое $0.04 < y/h < 0.23$ на вертикальном профиле скорости формируется особенность в виде локального минимума с двумя точками перегиба на координатах $y \approx 0.08\ h$ и $0.16\ h$. В слое, содержащем верхнюю точку перегиба, фиксируется формирование цилиндрических вихрей, что подтверждает заключение о потере устойчивости плоскопараллельного течения. Вихрь образуется при критическом значении ускорения силы обратного градиента давления, которое достигается на координате верхней точки перегиба в фазе максимального торможения жидкости.

Для осциллирующего течения длинная гармоническая волна на поверхности слоя жидкости формирует в придонном слое вихревые нити, вытянутые вдоль поперечной оси потока орбитального течения. Вихри возникают в зонах торможения орбитального движения в фиксированный момент времени. В первой четверти фазы волны, бегущей вдоль оси x, вихри вращаются по часовой стрелке, а в третьей четверти – против часовой стрелки. Вихри поднимаются вверх и быстро устремляются вниз при смене знака орбитального течения.

В момент формирования вихри захватывают песок, создавая цепочку параллельных канавок. Вихри теряют песок в зоне между начальными канавками, создавая насыпь. Смена знака орбитального движения обусловливает симметрию в форме насыпи.

Расстояние между вихрями и между канавками совпадают и сохраняются, пока высота гряд не превышает начальное значение толщины вязкого слоя с линейным вертикальным профилем скорости.

На основе анализа результатов моделирования лабораторных экспериментов можно сделать следующие выводы:

1. В пограничном слое потока с обратным градиентом давления жидкость периодически тормозится, что приводит к изменению вертикального профиля скорости от устойчивого до неустойчивого – вместо ламинарного течения появляются цепочки вихревых нитей.

2. На размываемом дне в момент формирования вихрей происходит захват донных частиц. В месте формирования вихревых нитей образуются параллельные канавки, вытянутые в поперечном направлении. Расстояние между канавками равно расстоянию между вихревыми нитями.

3. В осциллирующем потоке при проходе длинной волны вихри образуются в фазах, в которых существует обратный градиент давления, как и в стационарных потоках. Вихри захватывают песок, формируя начальные канавки, поднимаются вверх, и при смене знака орбитальной скорости устремляются вниз. В месте приземления вихри теряют песок, образуя насыпь между начальными канавками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Admiraal D, Musalemjara R, García M, Niño Yarko. Vortex trajectory hysteresis above self-formed vortex ripples. // Journal of HydraulicResearch. – 2006. – Vol. 44. №. 4. –P. 437–450.

2. Ahmed A.S.M, Sato S. Investigation of Bottom Boundary Layer Dynamics of Movable Bed by Using Enhanced PIV Technique. // Coastal Engng in Japan. – 2011. – Vol. 43. No. 4 – P. 239–258.

3. Arnaud D, Thierry G, Philippe B, Vincent M. Numerical modeling of subaqueous sand dune morpho dynamics. // Journal of Geophysical Research: Earth Surface. – 2016 – Vol. 121. No. 3 – P. 565–587.

4. Ahmadi F, Sanders S, Ghaemi S. Experimental investigation of threedimensional flow around particles in a turbulent channel flow. // Phys. Rev. Fluids. – 2020 – Vol. 5. No. 014302 – P. 1–23.

5. Adrian R.J, Marusic I. Coherent structures in flow over hydraulic engineering surfaces. //Journal of Hydraulic Research. – 2012 – Vol. 50. No.5 – P. 451–464.

6. Andrea Z, Stuart M.C, Mark T.S, Ivan M, Vladimir I.N. Flow development in rough-bed open channels: mean velocities, turbulence statistics, velocity spectra, and secondary currents. // Journal of Hydraulic Research – 2023 – Vol. 61. No. 1 – P. 133–144.

7. Benoit L, J Peixinho, Shun I, Yuji T. Subcritical transition to turbulence in a sudden circular pipe expansion. // Journal of Fluid Mechanics, – 2020 – Vol. 849. – P. 340–354.

8. Bagnold R.A. Motion of waves in shallow water. Interaction between waves sand bottoms. // Proceedings of the RoyalSociety of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. – 1946. – Vol. 187. №. 1008. – P. 1–18.

9. Benney D.J. Some properties of long nonlinear waves. // Stud. Appl. Math. – 1973. – Vol. 52. – P. 45–50.

10. Blondeaux P, Foti E, Vittori G. A theoretical model of asymmetry wave ripples. // Phil. Trans. R. Soc. – 2015. – Vol. 373. №. 2033. – P. 1–20.

11. Chen J, Zhang J, Yang W, Dong Y. Study on contaminant transport at the sediment-water interface in oscillating flow. //Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, – 2022. – Vol. 54. №. 10. – P. 2773–2783.

12. Chang J.Y, Tsai C.C. Wave Forces on a Partially Reflecting Wall by Oblique Bragg Scattering with Porous Breakwaters over Uneven Bottoms. // Journal of Marine Science and Engineering. – 2022. – Vol. 10. №. 3. – P. 1–27.

13. Dhawan.S, R.Narasimha. Some properties of boundary layer flow during the transition from laminar to turbulent motion. // Journal of Fluid Mechanics. – 1958. – Vol. 3. – Issue. 4. – P. 418 – 436.

14. Drozdz A, Niegodajew P, Elsner W. A new approach for estimation of the skin friction in turbulent boundary layer under the adverse pressure gradient conditions. // International Journal of Heat and Fluid Flow.– 2019. – Vol. 79. №. 108456. – P. 1–9.

15. Dhanush V.S, Mostafa S.S, Jorge P, Abdellah H. Direct numerical simulations of laminar and transitional flows in diverging pipes. // International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, – 2019. – Vol. 30. №. 1.– P. 75–92.

16. Doucette S, O'donoghue T. Response of sand ripples to change in oscillatory flow. // Sedimentology. – 2006. – Vol. 53. №. 3 – P. 581–596.

17. Egorov O.V, Martynov S.L, Melnikova O.N. Influence of periodic variations of flow velocity in bottom layer on vortex formation. // Bull of Russian Acad of Sci Physics. – 2002. – Vol. 55. №. 12. – P. 1887–2002.

18. Fjortoft R.// Geophys.Publ.– 1950. – Vol. 17. №. 6.

19. Farano M, Cherubini S, Robinet J-C, Palma P.D. Optimal bursts in turbulent channel folw. // Journal of Fluid Mechanics. – 2017. – Vol. 817. – P. 35–60.

20. George W.K. Recent Advancements Toward the Understanding of Turbulent Boundary Layers. // AIAA J. – 2006. – Vol. 44. №. 11.– P. 2435–2449.

21. He L. Yi S.H, Chen Z. Zhu Y.Z.// Proc. 14th Europ. Turbul. Conf. – 2013, Lyon, France.

22. Hermann Schlichting. Zur Enstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. // Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften. – 1929. – P. 21-44.

23. Joao C.H. Introduction to Boundary layer Flows. // Departamento De Engenharia Mecanica.

24. Lebon B, Nguyen M.Q, Peixinho J, Shadioo S.M, Hadjadj A. A new mechanism for periodic bursting of the recirculation region in the flow through a sudden expansion in a circular pipe. // Phys. Fluids. – 2018. – Vol. 30. №. 3. – P. 1–5.

25. Luo Z, Ding X, Zhang X, Ou Q, Yang F, Zhang T, Cao G. Experimental and numerical investigation of the bearing capacity and deformation behavior of coral sand foundations under shallow footing loads. // Engineering Geology. – 2024. – Vol. 310. №. 1.– P. 1–13.

26. Lin.C.C. On the Stability of Two-Dimensional Parallel Flows. // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 1944. – Vol. 30. No. 10. – P. 316-324.

27. Levin O, Henningson D. Turbulent spots in the asymptotic suction boundary layer. // Journal of Fluid Mechanics. – 2007. – Vol. 584. – P. 397–413.

28. Materny M, Drozdz A., Elsner W, Dorbniak S. Experimental analysis of turbulent boundary layer under the influence of adverse pressure gradient. // Arch. Mech. – 2008. – Vol. 60. №. 6. – P. 449–466.

29. Marieu V, Bonneton P, Foster D.L, Ardhuin F. Modeling of vortex ripple morphodynamics. // J. of Geophysical Research: Oceans. – 2008. – Vol. 113. №. 9. – P. 1–15.

30. Mazzuoli M, Blondeaux P, Vittori G, Uhlmann M, Simeonov J, Calantoni J. Interface-resolved direct numerical simulations of sediment transport in a turbulent oscillatory boundary layer. // J. Fluid Mech.– 2020. – Vol. 885. №. A28. – P. 1–31.

31. Malik M.R. Prediction and Control of Transition Hyper sonic Boundary Layer. // AIAAJ. – 1987. – VOL. 27. – NO. 11. – P. 1487-1493.

32. Nguyen M.Q, Shadloo M.S, Hadjadj A, Lebon B, Peixinho J. Perturbation threshold and hysteresis associated with the transition to turbulence in sudden expansion pipe flow. // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2019. – Vol. 76. – P. 187–196.

33. Nagib H.M, Chauhan K.A. Variations of von Kármán coefficient in canonical flows. // Phys. Fluids. – 2008. – Vol. 20. №. 101518. – P. 1–10.

34. Nielsen P. Dynamics and geometry of wave-generated ripples. // – 1981. – Vol. 86. №. C7. – P. 6467–6472.

35. Nienhuis J.H, Perron J.T, Kao J.C.T, Myrow P.M. Wavelength selection and symmetry breaking in orbital wave ripplesю. // J. Geophys. Res. Earth Surf. – 2014. – Vol. 119. – P. 2239–2257.

36. Prandtl L, Hannover. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kliner Reibung. // Proc. Third Inter. Math. Congr. – 1904. – Heidelberg. – P. 484–491.

37. Raayai-Ardakani Sh, McKinley G.H. Geometric optimization of riblet-textured surfaces for drag reduction in laminar boundary layer flows. // Phys. Fluids. – 2019. – Vol. 31. №. 053601 – P. 1–17.

38. Rosenbluth N.M, Simon A. Necessary and sufficient condition for the stability of plane parallel inviscid flow. // Phys. fl.– 1964. – Vol. 7. №. 4 – P. 557–668.

39. Reshotko E. Boundary Layer Stability and Transition. // Annual Review of Fluid Mechanics. –1976. – P. 311-349.

40. Samson A, Karthik Naicker, Sourabh S Diwan. Instability mechanisms and intermittency distribution in adverse pressure gradient attached and separated boundary layers. // Physics of Fluids. – 2021.

41. Stanislas M. WALLTURB: A European Synergy for the assessment of wall turbulence. // Proc. AIAA Conf. Reno. –2008. – P. 1–10.

42. Stone M.C, Hotchkiss R.H. Evaluating velocity measurement techniques in shallow streams. // Journal of Hydraulic Research. – 2007. – Vol. 45. №. 6 – P. 752–763.

43. Selvam K, Peixinho J, Willis A. Flow in a circular expansion pipe flow: effect of a vortex perturbation on localised turbulence. // Fluid Dyn. Res. – 2016. – Vol. 48. №. 061418. – P. 1–11.

44. Selvam K, Peixinho J, Willis A. Localised turbulence in a circular pipe flow with gradual expansion. // Journal of Fluid Mechanics. – 2015. – Vol. 771. №. 2. – P. 1–13.

45. Soria A, Liesa R, Carlos L, Navarrete R, Rodrigues-L, Pedro J. Sedimentology and stratigraphic architecture of Barremian synrift barrier island-estuarine depositional systems from blended field and drone-derived data. // Sedimentology. – 2023. – Vol. 70. №. 6 – P. 1007–1033.

46. Swart D.H. Offshore sand transport and equilibrium beach profiles. // Delft Hydraulic Publications. – 1974. №. 131. – 302 c.

47. Tan W, Yuan J. Experimental study of sheet-flow sediment transport under nonlinear oscillatory flow over a sloping bed. // Coastal Engineering. – 2019. – Vol. 147. – P. 1–11.

48.Vetel J, Garo A, Pelletier D, Farinas M.I. Asymmetry and transition to turbulence in a smooth axisymmetric constriction. // Journal of Fluid Mechanics. – 2008. – Vol. 607. – P. 351–386.

49.Valentin Z. Mixed depositional processes in coastal to shelf environments: Towards acknowledging their complexity./ Valentin Z, Marcello G, Miquel P-M, Helena V, Daniel S.C, Romain V.// The Depositional Record. – 2023. – Vol. 9. №. 2 – P. 206–212.

50.Walter Tollmien. Grenzschichttheorie. // Handbuch der Experimentalphysik IV. – 1931. – 1. – P. 239 – 287.

51. Wosnik M, Castillo L, George W.K. A Theory for Turbulent Pipe and Channel Flows. // J. Fluid Mech. – 2000. – Vol. 421. – P. 115–145.

52. Wong M.K, Sheng L.C, NorAzwadi C.S, Hashim G.A. Numerical Study of Turbulent Flow in Pipe with Sudden Expansion. // Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics. – 2015. – Vol. 6. No. 1.– P. 34–48.

53. Wang P, Bai X.S, Wessman M, Klingmann J. Large eddy simulation and experimental studies of a confined turbulent swirling flow. // Physics of Fluids. – 2004. – Vol. 16. №. 9 – P. 3306–3324.

54. Wang D, Yuan J. An experimental study of net sediment transport rate due to acceleration-skewed oscillatory flows over rippled seabeds. // Coastal Engineering. – 2020. – Vol. 155. №. 103583.– P. 1–13.

55. Wang D, Yuan J. Geometric characteristics of coarse-sand ripples generated by oscillatory flows: a full-scale experimentalstudy. // Coast.Eng. – 2019. – Vol. 147. – P. 159–174.

56.Wu X, Baas J.H, Parsons D.R, Eggenhuisen J, Amoudry L, Cartigny M, McLelland S, Mouazze D, Ruessink G. Wave ripple development on mixed Clay-sand substraits: effects of clay winnowing andarmoring. // J. of Geophysical Research: Earth Surface. – 2019. – Vol. 123. №. 11.– P. 2784–2801.

57. Wiberg P.L, Harris C.K. Ripple geometry in wave-dominated environments. // Journal of Geophysical Research. – 1994. – Vol. 99. №. C1. – P. 775–790.

58. Zhou Z, Zhang Q, Zhang J. Three-Dimensional Lattice Boltzmann Simulation of Oscillatory Boundary Layer Flow over Rippled Bed. // Journal of Tianjin University (Science and Technology). – 2016. – Vol. 31. – P. 463–471. [DOI:10.16076/j.cnki.cjhd.2016.04.010]

59. Дикий Л.А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. // М.: Гидрометеоиздат Ленинград. – 1976. – 108 с.

60. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. // М.: Физматлит.– 2005. – 288 с.

61. Дебольская Е.И. Динамика водных потоков под ледяным покровом.// М.: Изд-во Московского государственного университета природообустройства. – 2003. – 263 с.

62. Исупова М.В, Долгополова Е.Н. Гидролого-морфологические процессы в устьевой области р. Конго и влияние на них подводного каньона. // Л.: Водные ресурсы. – 2016. – Т. 43. № 4. – С. 359–378.

63. Иванова И.Н, Мельникова О.Н. Экспериментальное исследование взаимодействия ветра с волной, индуцированной волнопродуктором в прямом канале. // Л.: Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия.– 2023. – Т. 78. № 6. – С. 1–6.

64.Князева Е.Ю, Чесноков А.А. Критерии устойчивости сдвигового течения жидгости и гиперболичность уравнений теории длинных волн. // Л.: Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т. 310. В. 5. – С. 30–37.

65. Чесноков А.А. Вихревые движения жидкости в узком канале. // Л.: ПМТФ. – 1998. – Т. 39. № 4. – С. 38–49.

66. Мельникова О.Н. Формирование гряд на дне прямого канала потоком со свободной поверхностью. // Л.: Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. – 2005. – Т. 41. № 5. – С. 682–690.

67. Мельникова О.Н, Ян Х. Деформация вертикального профиля скорости в процессе торможения потока с обратным градиентом давления. // Л.: Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия.– 2021. № 2. – С. 49–54.

68. Мельникова О.Н, Показеев К.В. Подковообразные вихри у размываемых границ неоднородных потоков. // Л.: Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. – 2018. – Т. 54. № 1. – С. 45–53.

69. Мельникова О.Н, Ян Х. Устойчивость ламинарного течения на границе равномерного и замедляющегося потоков. // Л.: Известия Российской академии наук. Серия физическая.– 2022. – Т. 86. № 2. – С. 247–251.

70. Мельникова О.Н, Ян Х, Иванова И.Н. Образование гряд на дне осциллирующим потоком воды. // Л.: Процессы в геосредах. – 2024. – Т. 39. № 1. – С. 2380–2386.

71. Мельникова О.Н. Динамика руслового потока. // М.: МАКС Пресс. – 2006. – 139 с.

72. Мельникова О.Н, Ян Х. Особенности течения жидкости в пограничном слое потока с обратным градиентом давления.//М.: Конференция «Волны-2020». – 2020, – Т.9, – С.4–7, Москва, Россия.

73. Ян Х. Экспериментальное исследование течения жидкости в пограничном слое потока с обратным градиентом давления.//М.:МАКС Пресс, 2020. – Материалы международного молодежного научного форума«ЛОМОНОСОВ-2020». – 2020, Москва, Россия.

БЛАГОДАРНОСТИ.

Время летит. Сцена, когда я спускаюсь по трапу в аэропорту Шереметьево шесть лет назад, кажется вчерашней. С того момента, как я вступил на чужую землю, и до сих пор мое настроение менялось от волнения до спокойствия. Это было нелегко. Мои бывшие партнеры разошлись, чтобы реализовать свои жизненные цели. Я также настоял на том, чтобы идти по моему выбранному пути. На этом пути я столкнулся со многими трудностями и встретил много преподавателей и друзей, которые мне помогали. Обучения на физическом факультете Московского университета или сейчас в Институте водных проблем, я никогда этого не забуду. Именно Ольга Николаевна Мельникова вывела меня на исследовательский путь. Она очень внимательная в своей работе. Она всегда терпеливо направляла меня. С ее помощью я успешно закончил магистратуру. Именно Александр Наумович Гельфан дал мне возможность учиться в Институте водных проблем, а также составил для меня план исследований в период моей кандидатский диссертации. Я смог завершить эту статью с постоянной помощью Ольги Николаевны и Ирины Николаевны. Искренне благодарю вас - моих руководителей!

То, что я не могу забыть, - это развитие моей страны и поддержка моей семьи. Я благодарен за финансовую поддержку моей родины, которая позволила мне закончить учебу без забот в спокойной обстановке проживания. Для меня, если завершение учебы - это половина моей жизни в России, то другая половина - это встреча с моей женой Александрой Владимировной здесь. Она всегда рядом со мной, чтобы подбадривать и побуждать меня двигаться вперед, будь это радость или боль. Конечно, мои родители также полностью поддерживают меня в учебе и достижении моих жизненных идеалов.

Подводя итог, мои преподаватели, друзья и родственники, без вас я бы не был тем, кем я являюсь сегодня, спасибо вам!