

УДК 532.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕВЫХ МУЛЬТИПОЛЕЙ В ОДНОРОДНОЙ И ДВУХСЛОЙНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

© 2015 г. Л. Г. Куракин, И. В. Островская, М. А. Соколовский

Представлено академиком РАН Р.И. Нигматулиным 17.09.2014 г.

Поступило 22.09.2014 г.

DOI: 10.7868/S0869565215140121

Проблема устойчивости мультиполярных вихревых структур интенсивно исследуется, начиная с работ Кельвина, Гребли, Горячева, Жуковского [1, 2]. Наиболее глубоко удалось продвинуться в ее решении в рамках модели точечных вихрей на плоскости (уравнения Кирхгофа). Усилия многих авторов завершились в работе [3] математически строгим решением задачи Кельвина об устойчивости стационарного вращения системы одинаковых точечных вихрей, расположенных на плоскости в вершинах правильного N -угольника. Для этого было введено понятие обобщенных стационарных движений в динамических системах с симметрией и развит специальный подход к проблеме их устойчивости в смысле Рауса. На его основе доказано, что максимальное число точечных вихрей в устойчивом правильном вихревом многоугольнике равно семи. Подход, развитый в [3], был применен к решению проблемы Кельвина для вихрей на сфере [4], в кольце [7], внутри и вне круга [5, 6].

Дискретной вихревой структуре типа $N + 1$ (равносторонний вихревой N -угольник с центральным вихрем произвольной интенсивности) посвящены многочисленные исследования [1, 2]. Линейный анализ ее устойчивости для уравнений Кирхгофа при произвольном N приведен в [8], а для геострофической двумерной однослойной модели в приближении f -плоскости и $N \leq 10$ в [9].

В данном сообщении рассматривается двухслойная квазигеострофическая модель в прибли-

жении f -плоскости [2]. Методами работы [3] проводится анализ устойчивости дискретной вихревой структуры типа $N + 1$ ($N = 2, 3$). Он подтверждается численным расчетом траекторий вихрей. Исследуется и предельный случай однородной жидкости. Частные результаты в этой задаче получены в [10, 11] (см. замечание 1).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему $N + 1$ точечных вихрей в двухслойной жидкости. Пусть $v_k = (x_k, y_k)$ – декартовы координаты k -го вихря ($k = 0, 1, \dots, N$). Вихри v_1, \dots, v_N лежат в одном слое (для определенности – в нижнем) и имеют одинаковую интенсивность κ . Вихрь v_0 имеет интенсивность κ_0 . Далее различаются случаи:

I) вихрь v_0 находится в верхнем слое с толщиной h_1 ;

II) все $N + 1$ вихрей расположены в нижнем слое с толщиной h_2 .

Пусть $h_1 + h_2 = 1$, эффективные интенсивности $\kappa h_2 = 1$ для одинаковых вихрей и $\kappa_0 h_1 = \Gamma$ для вихря v_0 в случае I или $\kappa_0 h_2 = \Gamma$ в случае II. Введем обозначения для обобщенных координат $q_j = x_j$ ($j = 0, 1, \dots, N$) и обобщенных импульсов $p_0 = \Gamma y_0$, $p_k = y_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$).

Движение рассматриваемой системы вихрей описывается гамильтонианом $\mathcal{H}(q, p)$, $q = (q_0, \dots, q_N)$, $p = (p_0, \dots, p_N)$ [12]:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi} \left[\Gamma \sum_{k=1}^N V \left(\sqrt{(q_0 - q_k)^2 + \left(\frac{p_0}{\Gamma} - p_k \right)^2} \right) + \sum_{1 \leq j < k \leq N} W \left(\sqrt{(q_j - q_k)^2 + (p_j - p_k)^2} \right) \right]. \quad (1)$$

Функции V, W имеют вид

$$W(\xi) = \ln \xi - \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} K_0(\gamma \xi),$$

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
Южный математический институт
Владикавказского научного центра
Российской Академии наук и Правительства Республики
Северная Осетия–Алания
Институт водных проблем
Российской Академии наук, Москва
Институт океанологии им. П.П. Ширшова
Российской Академии наук, Москва
E-mail: sokol@aquas.laser.ru

$$V(\xi) = \begin{cases} \ln \xi + K_0(\gamma \xi) & \text{в случае I,} \\ W(\xi) & \text{в случае II.} \end{cases}$$

Здесь K_0 – модифицированная функция Бесселя, $\frac{1}{\gamma} > 0$ – внутренний радиус деформации Россби [2], $\alpha = \frac{h_2 - h_1}{2}$, так что $h_1 = \frac{1 - \alpha}{2}$, $h_2 = \frac{1 + \alpha}{2}$ и выполнено условие $-1 < \alpha < 1$.

Система с гамильтонианом (1) имеет четыре интеграла: энергию $\mathcal{H}(q, p)$, компоненты импульса I_1, I_2 и суммарный момент инерции M :

$$I_1 = \sum_{k=1}^N q_k + \Gamma q_0, \quad I_2 = \sum_{k=0}^N p_k,$$

$$M = \sum_{k=1}^N (q_k^2 + p_k^2) + \Gamma q_0^2 + \frac{p_0^2}{\Gamma}.$$

Переходя к переменным $z_k = q_k + ip_k$, $\bar{z}_k = q_k - ip_k$, получаем

$$\dot{\bar{z}}_k = 2iH_k, \quad \dot{z}_k = -2iH_{\bar{z}_k}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь гамильтониан $H = \mathcal{H}(q(z, \bar{z}), p(z, \bar{z}))$, а переменная $z = (z_0, z_1, \dots, z_N)$. Фазовое пространство Z системы (2) есть \mathbb{C}^{N+1} с вырезами вдоль всех гиперплоскостей $z_j = z_k, j \neq k$ ($j, k = 1, 2, \dots, N$ в случае I и $j, k = 0, 1, \dots, N$ в случае II).

Система (2) инвариантна относительно группы \mathcal{G} евклидовых движений плоскости \mathbb{R}^2 . Действие $g \mapsto L_g$ этой группы на фазовом пространстве Z определяется равенством $L_g z = (gz_0, gz_1, \dots, gz_N)$ для любой точки $z = (z_0, z_1, \dots, z_N) \in Z$ и любого движения $g \in \mathcal{G}$. Таким образом, все точки z_0, z_1, \dots, z_N подвергаются одному и тому же преобразованию g . Образующие группы \mathcal{G} суть зеркальное отражение $j: z \mapsto \bar{z}$, трансляция $g^{\eta}: z \mapsto z + \eta, \eta \in \mathbb{C}$, и вращение $g^{\beta}: z \mapsto e^{i\beta} z, \beta \in \mathbb{R}$. Заметим, что по теореме Э. Нётер [13] интегралы импульса I_1, I_2 возникают как следствие трансляционной инвариантности гамильтониана H , а интеграл момента инерции M – как следствие его инвариантности относительно вращения. Напомним, что стационарным называется движение, которое осуществляется преобразованием некоторой однопараметрической подгруппы группы симметрии данного уравнения (см., например, [3]).

Стационарное движение, отвечающее подгруппе вращений g^{β} , находим в виде $z_k = e^{i\omega t} u_k$, где неизвестные $u_0, u_1, \dots, u_N \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}$. В случаях

$N = 2, 3$ примерами такого движения являются следующие решения:

$$z_0(t) = 0, \quad z_j(t) = R \exp \left\{ i \left(\frac{2\pi(j-1)}{N} + \omega_N t \right) \right\},$$

$$R > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\omega_2 = \frac{1}{4\pi R} (\Gamma V'(R) + W'(2R)), \quad (3)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{4\pi R} (\Gamma V'(R) + \sqrt{3} W'(\sqrt{3}R)),$$

в виде конфигурации N одинаковых вихрей нижнего слоя, расположенных равномерно на окружности радиуса R и вращающихся с постоянной угловой скоростью $\omega_N(\Gamma, R)$ вокруг $(N+1)$ -го вихря. В работе [10] решение (3) в случае I названо “каруселью”.

Замена переменных $z_k(t) = e^{i\omega_N t} \zeta_k(t), k = 0, 1, \dots, N$, в системе (2) приводит к уравнению относительного движения с относительным гамильтонианом (по терминологии работы [3])

$$E(\zeta) = H(\zeta) + \frac{\Omega_N}{2} M(\zeta),$$

$$\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_N) \in \mathbb{C}^{N+1}.$$

На каждой плоскости переменных ζ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) введем квазиполярные координаты $\zeta_j = \sqrt{R^2 + 2r_j} \exp \left[i \left(\frac{2\pi(j-1)}{N} + \theta_j \right) \right]$. В переменных $\rho = (q_0, r_1, \dots, r_N, p_0, \theta_1, \dots, \theta_N)$ получим уравнения движения с гамильтонианом $E(\zeta(\rho))$.

Решению (3) отвечает непрерывное семейство равновесий $\mathcal{C} = \{\rho \in \mathbb{R}^{2(N+1)} : q_0 = r_1 = \dots = r_N = p_0 = 0, \theta_1 = \dots = \theta_N\}$. Под устойчивостью по Раусу решения (3) будем понимать устойчивость по Ляпунову семейства равновесий \mathcal{C} (см. [3]). Заметим, что для доказательства такого рода устойчивости достаточно найти знакоположительный интеграл, являющийся положительно-определенным по части переменных в подпространстве, ортогональном семейству равновесий \mathcal{C} .

Пусть $E_2 = (S\rho, \rho)$ – квадратичные слагаемые разложения гамильтониана $E(\zeta(\rho))$ в ряд Тейлора по переменной ρ в окрестности нулевого положения равновесия, а L – соответствующая матрица линеаризации. Матрица S – симметричная, имеет нулевое собственное значение, отвечающее семейству \mathcal{C} . Достаточное условие устойчивости по Раусу решения (3) означает, что все остальные собственные значения матрицы S имеют один знак. Экспоненциальная неустойчивость имеет место, когда у матрицы L есть собственные значения с положительной действительной частью.

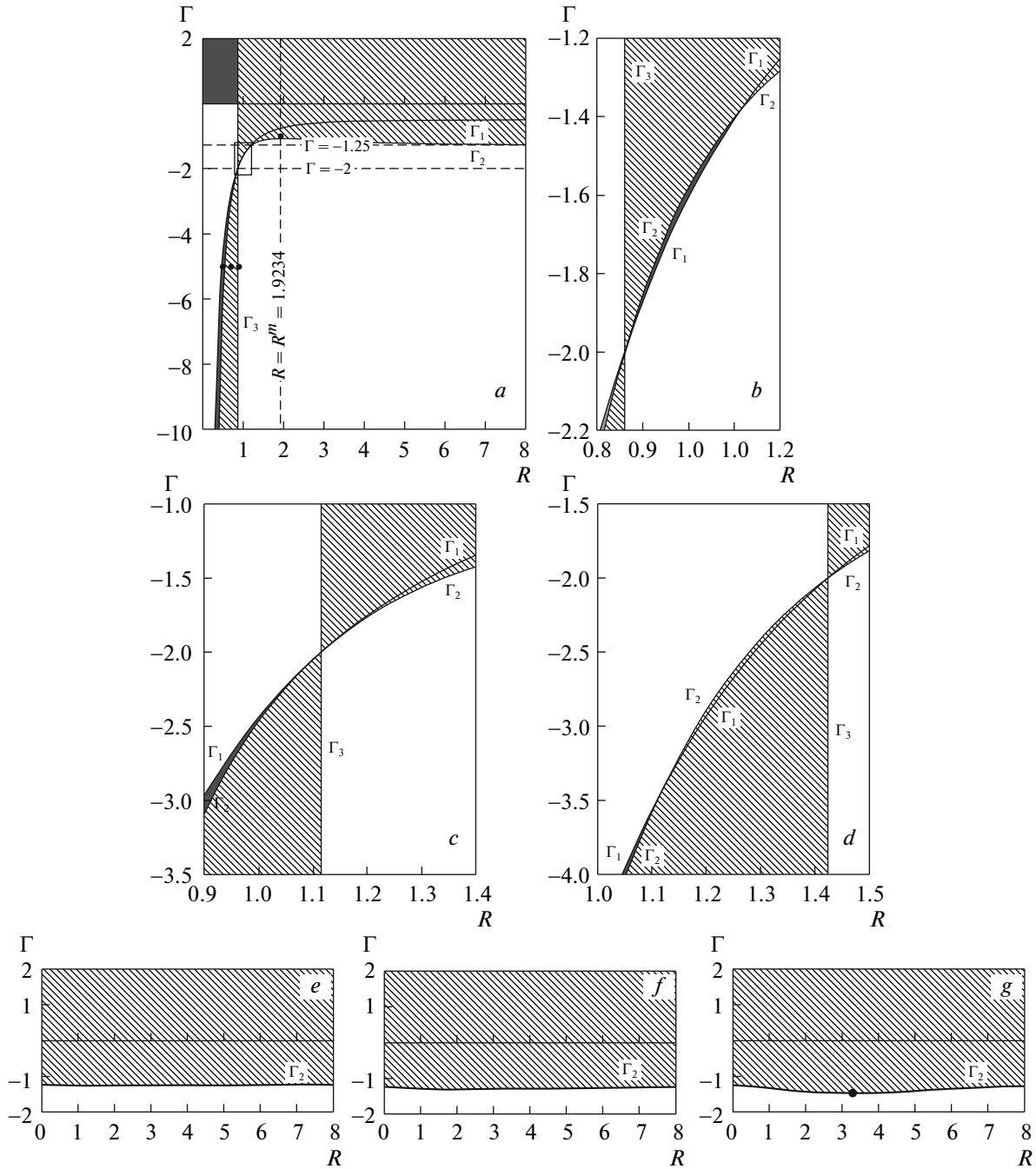


Рис. 1. Диаграммы устойчивости триоля ($N = 2$): $a-d$ – вихревая карусель (случай I), $e-g$ – вихри в одном слое (случай II).

ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Аналитическое исследование собственных значений матриц S и L показал, что полуплоскость параметров (R, Γ) , $R \geq 0$ разбивается на области трех типов (см. рис 1, 2).

А. Темная область – устойчивость по Раусу в нелинейной постановке. Собственные значения матрицы S , кроме простого нуля, положительны.

В. Заштрихованная область – экспоненциальная неустойчивость.

С. Светлая область. Собственные значения матрицы S имеют разные знаки, а у матрицы L все они чисто мнимые. В этом случае для заключения об устойчивости требуется нелинейный анализ.

Кривые $\Gamma_j, j = 1, \dots, 6$, на рис. 1, 2 задаются формулами:

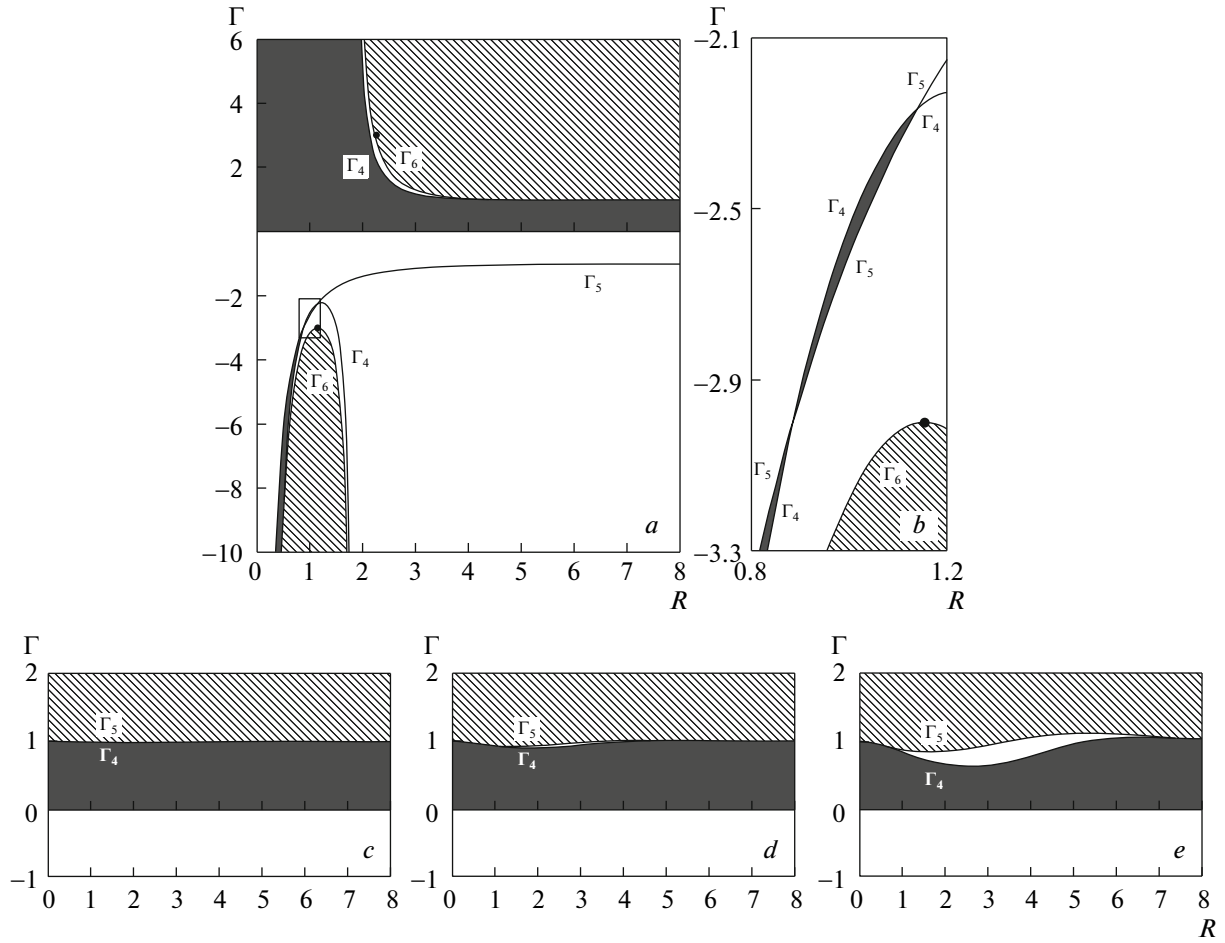


Рис. 2. То же самое, что и на рис. 1, но для квадруполя ($N = 3$).

$$\Gamma_1(R) = -\frac{Y_1}{X_1}, \quad \Gamma_2(R) = \frac{2RX_2 - Y_1}{X_1 - RX_2},$$

$$\Gamma_3 = \{(\Gamma, R_*) \in \mathbb{R}^2: R = R_*\},$$

$$\Gamma_4(R) = \frac{(2Z_1 - \sqrt{3}RX_2 - \sqrt{3}X_1)(Z_1 - \sqrt{3}RZ_2)}{(-X_1 + RX_2)(\sqrt{3}Z_1 - 2X_1 - RZ_2)},$$

$$\Gamma_5(R) = -\frac{\sqrt{3}Z_1}{X_1},$$

$$\Gamma_6(R) = -\frac{3(RX_2 + X_1 + RZ_2 - \sqrt{3}Z_1)^2}{4(X_1 - RX_2)(\sqrt{3}Z_1 - 2X_1 - RZ_2)}.$$

Здесь введены обозначения: $X_1 = V'(R)$, $X_2 = V''(R)$, $Y_1 = W'(2R)$, $Y_2 = W''(2R)$, $Z_1 = W'(\sqrt{3}R)$, $Z_2 = W''(\sqrt{3}R)$, а величина R_* является корнем уравнения $Y_1(R) - 2X_1(R) = 0$. Параметр $\gamma = 1$, случай $\gamma \neq 1$ сводится к последнему масштабной заменой $R \mapsto R\gamma$.

Положения маркеров на панелях a, g рис. 1 и панелях a, b рис. 2 отвечают начальным состояниям для численных экспериментов на рис. 3 и 4 соответственно. Результаты анализа устойчивости для вихревого триполя ($N = 2$) приведены на рис. 1, а для квадруполя ($N = 3$) на рис. 2.

Случай I: вихри в разных слоях. Положения a, b на рис. 1 соответствуют случаю равных толщин $h_1 = h_2 = \frac{1}{2}$ ($\alpha = 0$). На рис. 1, b показано в крупном масштабе пересечение кривых Γ_1 и Γ_2 в прямоугольной области, выделенной на рис. 1, a . На рис. 1 позиции $b-d$ показывают изменение топологического разбиения пространства параметров на три типа областей, когда параметр α , уменьшаясь, проходит через критическое значение $\alpha_* = -0.5419$, а именно $\alpha = 0 > \alpha_*$ на панели b , $\alpha = \alpha_*$ на панели c и $\alpha = -0.8 < \alpha_*$ на панели d . Точке $\alpha = \alpha_*$ отвечает частный случай, когда кривые Γ_1 и Γ_2 касаются друг друга и лункообразная область между точками их пересечения стягива-

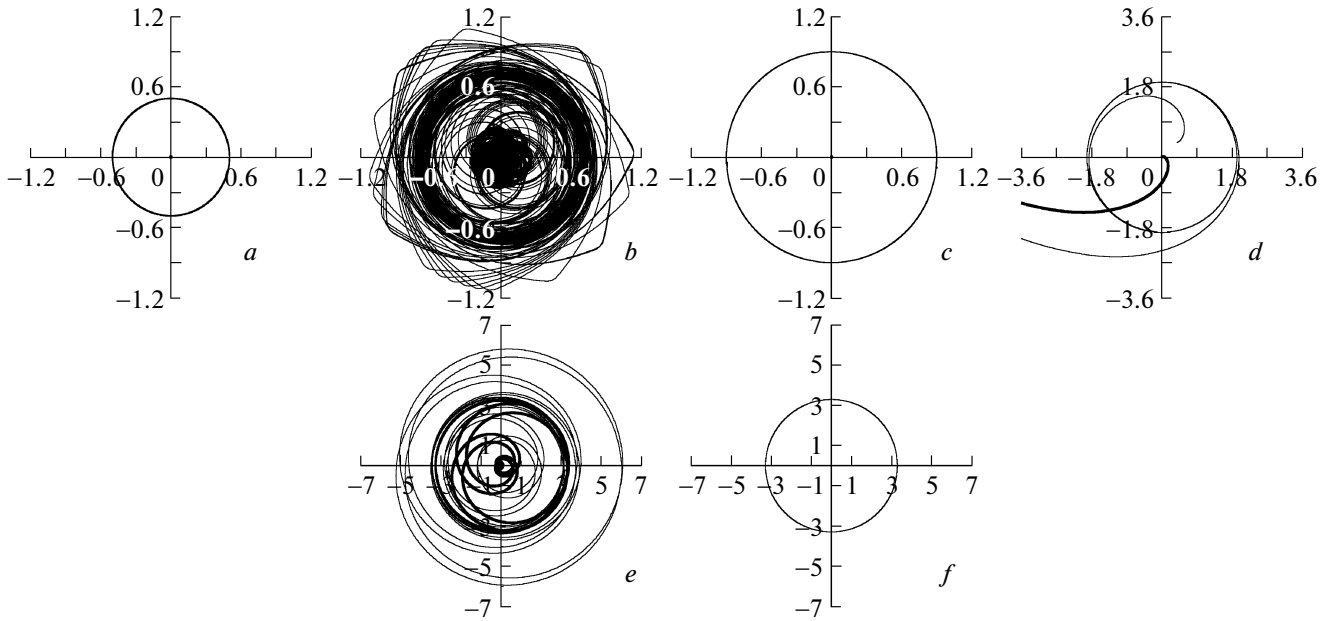


Рис. 3. Траектории абсолютного движения вихрей триполярной карусели *a–d* и триполярной вихревой структуры нижнего слоя *e–f*.

ется в одну точку. В остальной части области параметров (R, Γ) характер такого разбиения слабо зависит от параметра α , т.е. качественно такой же, как на рис. 1, *a*.

Позиции *a, b* на рис. 2 имеют тот же смысл, что и позиции *a, b* на рис. 1, но для случая квадрупольных каруселей ($N = 3$). Здесь $\alpha = 0.8$. Критическое значение $\alpha_{**} = -0.6903$ играет ту же роль, что и α_* в случае $N = 2$.

Случай II: вихри в одном слое. Вихревая триполярная структура нижнего слоя ($N = 2$) экспоненциально неустойчива, когда $\Gamma > \Gamma_2$, и линейно устойчива (требуется нелинейный анализ) при $\Gamma < \Gamma_2$ (см. рис. 1, *e–1, g*).

На рис. 2, *c–e* изображены диаграммы устойчивости для квадрупольных структур нижнего слоя при $\alpha = 0.8$, $\alpha = 0$ и $\alpha = -0.8$ соответственно. Здесь область экспоненциальной неустойчивости расположена выше кривой Γ_5 , а область устойчивости по Раусу ограничена нейтральной кривой Γ_4 сверху и прямой $\Gamma = 0$ снизу. Исследование устойчивости в областях $\Gamma_4 \leq \Gamma \leq \Gamma_5$ и $\Gamma < 0$ требует проведения нелинейного анализа.

На рис. 3 и 4 приведены расчетные траектории вихрей, подтверждающие результаты анализа устойчивости. Так, на рис. 3, *a–d* представлены траектории абсолютного движения вихрей триполярной карусели при $N = 2$, $\alpha = 0$: на панелях *a–c* $\Gamma = -5$ и $R = 0.5$, $R = 0.7$, $R = 0.9$ соответственно; а на панели *d* $(R, \Gamma) = (R^m, -1)$. Здесь $R^m = 1.9234$, где достигается максимальное значение $\Gamma^m = \max \Gamma_2 = -1.0694$. Этим экспериментам отве-

чают маркеры на рис. 1, *a*. На рис. 3, *e, f* изображены траектории периферийных вихрей (тонкие линии) и центрального вихря (жирные линии) триполярной вихревой структуры нижнего слоя при $\alpha = -0.8$: $(R, \Gamma) = (3.2894, -1.45)$ (*e*), $(R, \Gamma) = (3.2894, -1.50)$ (*f*). Отвечающие этим экспериментам маркеры практически неразличимы на рисунке 1, *g*: первый из них расположен чуть выше кривой Γ_2 , а второй – чуть ниже. Фрагменты *b, d* и *e* демонстрируют неустойчивое состояние вихревых структур. Рисунок 4 дает примеры траекторий периферийных вихрей (тонкие линии) и центрального вихря (жирная линия) неустойчивых квадрупольных каруселей при $N = 3$, $\alpha = 0.8$. На панелях *a* и *b* $(R, \Gamma) = (1.1540, -3.0001)$. Этому эксперименту отвечают маркеры в области неустойчивости вблизи ее границы при $\Gamma = \max_{|R < R_c} \Gamma_6 = -3$ на рис. 2, *a* и *b*. На панелях *c* и *d* $(R, \Gamma) = (2.2600, 3)$. Этому эксперименту отвечает маркер в верхней полуплоскости на рис. 2, *a*. Здесь 4 (*a* и *c*) – абсолютное движение вихрей; 4 (*b* и *d*) – движение периферийных вихрей относительно центрального вихря.

З а м е ч а н и е 1. Численный анализ устойчивости вихревой карусели для $N = 2$ и $\alpha = 0$ проведен в [10]. В работе [11] исследовалась устойчивость вихревой карусели для $N = 2, 3, 4$ и $\alpha = 0$. Использовались классические идеи исследования устойчивости инвариантных множеств в динамических системах с несколькими первыми интегралами. В этой области работали Раус, Ляпунов, Леви–Чивита и многие другие (см. обзор [14]). Кизнером в [11] было принято определение:

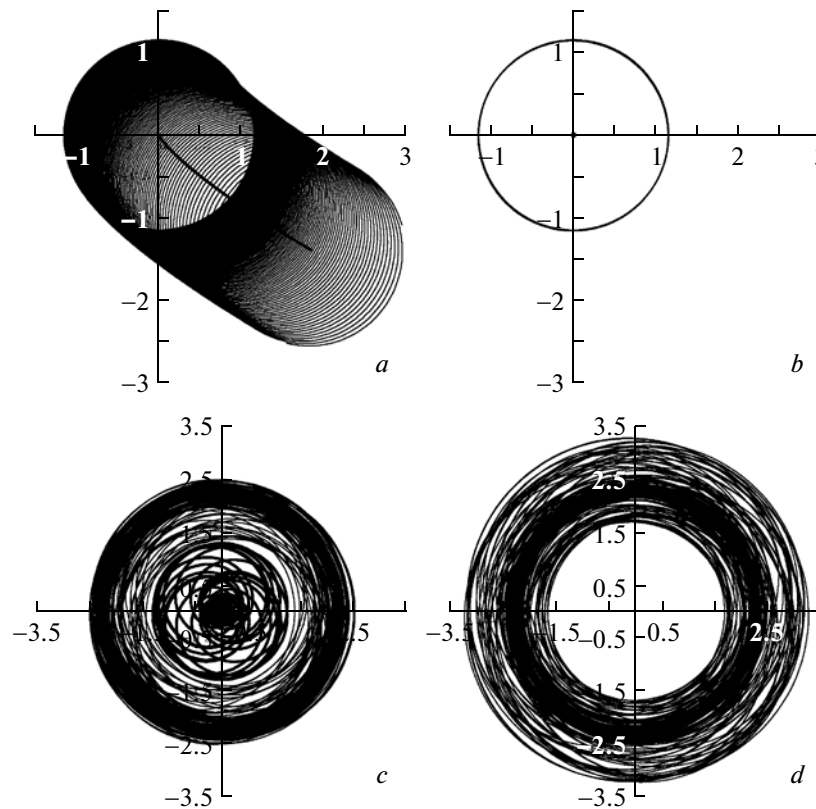


Рис. 4. Абсолютные (*a, c*) и относительные (*b, d*) траектории движения вихрей неустойчивых квадруполярных каруселей.

вихревой мультиполь устойчив, если при достаточно малом начальном возмущении расстояний между его вихрями эти расстояния остаются слабо возмущенными в течение всего времени. Такая устойчивость не исключает, что мультиполь уходит со временем от невозмущенного положения на сколь угодно большое расстояние. Поэтому из нее не следует устойчивость по Раусу (см. рис. 4, *a*). Наиболее полные результаты в [11] получены для $N = 2$ (устойчивость доказана в точной нелинейной постановке для всех значений параметров из светлой и темной областей на рис. 1, *a*), а для случаев $N = 3, 4$ накладывались ограничения на интенсивности вихрей и на возмущения начальных данных.

Однородная идеальная жидкость. Это случай II при $\alpha = 1$, т.е. при $V(\xi) = W(\xi) = \ln \xi$. Вихревой триполь экспоненциально неустойчив при $\Gamma > -\frac{5}{4}$, линейно устойчив при $\Gamma < -\frac{5}{4}$ (требуется нелинейный анализ). Вихревой квадруполь экспоненциально неустойчив, когда $\Gamma > 1$, линейно устойчив при $\Gamma < 0$ (требуется нелинейный анализ) и устойчив по Раусу, если $0 < \Gamma < 1$.

Замечание 2. По поводу устойчивости в проблеме $N + 1$ вихрей в модели Кирхгофа (одно-

родная жидкость) обычно ссылаются на статью [15]. В ней ошибочно утверждается, что вихревой триполь (квадруполь) устойчив по Ляпунову при $-\frac{1}{4} < \Gamma < \frac{1}{4}$ ($-\frac{1}{2} < \Gamma < 1$) и экспоненциально неустойчив при грубом нарушении этого условия. Правильное условие экспоненциальной неустойчивости указано в работе [9].

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проектная часть государственного задания ЮФУ в сфере научной деятельности № 1.1398.2014/К), а третьего автора – гранта РНФ (проект 14–50–00095).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Newton P.K.* The N-Vortex Problem: Analytical Techniques. Ser. Appl. Math. Sci. N.Y.; B.; Heidelberg: Springer, 2001. V. 145. 415 p.
2. *Sokolovskiy M.A., Verron J.* Dynamics of Vortex Structures in a Stratified Rotating Fluid. Ser. Atmospheric and Oceanographic Sciences Library. Cham; Heidelberg; N.Y.; Dordrecht; L.: Springer, 2014. V. 47. 382 p.
3. *Kurakin L.G., Yudovich V.I.* The Stability of Stationary Rotation of a Regular Vortex Polygon // Chaos. 2002. V. 12. № 3. P. 574–595.

4. Куракин Л.Г. О нелинейной устойчивости правильных вихревых многоугольников и многогранников на сфере // ДАН. 2003. Т. 388. № 4. С. 482–487.
5. Куракин Л.Г. Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области // ДАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 52–55.
6. Kurakin L.G., Ostrovskaya I.V. Nonlinear Stability Analysis of a Regular Vortex Polygon Outside a Circle // Reg. Chaot. Dyn. 2012. V. 17. № 5. P. 385–396.
7. Kurakin L.G. Influence of Annular Boundaries of Thomson's Vortex Polygon Stability // Chaos. 2014. V. 14. 023105. DOI:10.1063/1.4870735.
8. Campbell L.G. Transverse Normal Modes of Finite Vortex Arrays // Phys. Rev. A. 1981. V. 24. № 1. P. 514–534.
9. Morikawa G.K., Swenson E.V. Interacting Motion of Rectilinear Geostrophic Vortices // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 6. P. 1058–1073.
10. Sokolovskiy M.A., Verron J. Motion of $A + 1$ Vortices in a Two-Layer Rotating Fluid. In: IUTAM Symp. on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence. IUTAM Bookseries. Heidelberg: Springer, 2008. V. 6. P. 481–490.
11. Kizner Z. On the Stability of Two-Layer Geostrophic Point-Vortex Multipoles // Phys. Fluids. 2014. V. 26. 046602. DOI:10.1063/1.4870239.
12. Гряник В.М. Динамика сингулярных геострофических вихрей в двухуровневной модели атмосферы (океана) // Изв. АН СССР. ФАО. 1983. V. 19. № 3. С. 227–240.
13. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. Изд. 5-ое. М.: Едиториал УРСС, 2003. 408 с.
14. Каранетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 166 с.
15. Cabral H.E., Schmidt D.S. Stability of Relative Equilibria in the Problem on $N + 1$ Vortices // SIAM J. Math. Anal. 1999. V. 31. № 2. P. 231–250.