

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ
ПРИ ВХОЖДЕНИИ ПРИЛИВНЫХ ВОЛН В ЭСТУАРИИ¹

© 2016 г. В. Н. Зырянов, М. К. Чебанова

*Институт водных проблем РАН
119333 Москва, ул. Губкина, 3
E-mail: zuryanov@iwp.ru, ejek@inbox.ru*

Поступила в редакцию 25.06.2015 г.

Исследован феномен усиления приливных волн в воронкообразных эстуариях. Показано, что эффект схождения берегов по ходу распространения приливной волны в залив (гидродинамический эффект конфузора) – один из факторов, усиливающих прилив. Противоположный ему эффект турбулентного трения, действие которого усиливается с уменьшением глубины залива, напротив, уменьшает амплитуду прилива вследствие диссипации энергии приливной волны. Существенную роль в формировании режимов трансформации волны играет диффузионный слой Стокса. При средних глубинах эстуария, существенно больших слоя Стокса, сильнее проявляется эффект конфузора и амплитуда прилива увеличивается в вершине эстуария. При глубинах, меньших толщины слоя Стокса, турбулентное трение превалирует над эффектом конфузора и амплитуда приливной волны уменьшается в вершине эстуария. При глубинах порядка толщины слоя Стокса возникает интересное промежуточное явление – при входе в эстуарий сначала проявляется эффект трения и амплитуда приливной волны уменьшается, но затем начинает превалировать эффект конфузора и амплитуда приливной волны вновь увеличивается к вершине эстуария. При совпадении периода приливной волны с периодом сейш в эстуарии возникает резонансное усиление сейшевых колебаний.

Ключевые слова: эстуарий, эволюция приливной волны, эффект конфузора, эффект турбулентного трения, слой Стокса, сейши, резонансное усиление.

DOI: 10.7868/S0321059616040180

В большинстве случаев в прибрежной материковой зоне, где рельеф дна ровный и береговая линия плавная, амплитуды приливов не превышают 2 м. Приливы с амплитудой 3 м встречаются гораздо реже, а амплитуды >6 м наблюдаются только в различного рода узкостях – вершинах заливов, устьях рек, проливах. Так, зал. Фанди, наряду с зал. Унгава, известен своими рекордными приливами, достигающими 18 м. Залив Фанди имеет форму вытянутой трапеции. В вершине залив разделяется на 2 бухты, в одной из которых наблюдаются рекордные по амплитуде приливы. Залив воронкообразно сужается и характеризуется уменьшением глубины по направлению к его вершине [10].

Значительные приливы также наблюдаются у берегов Патагонии в заливах Сан-Матиас и Сан-Хорхе (до 9–12 м), в устье р. Гальегос амплитуды достигают 14 м [4]. На восточном побережье Ат-

лантического океана вдоль французского берега прол. Ла-Манш в зал. Сен-Мало амплитуды приливов достигают 11–12 м. Как и в зал. Фанди, здесь главную роль в возникновении таких приливов играет воронкообразная форма залива с постепенным уменьшением глубины к его вершине. Далее к востоку, в Шербуре амплитуда уменьшается почти в 2 раза, так как направление движения приливной волны оказывается параллельным берегу.

Бристольский зал. – еще одно место в Европе, характеризующееся большими приливами. В вершину залива, имеющего форму треугольника, впадает р. Северн, образующая вместе с заливом воронкообразный эстуарий. Амплитуда максимального сизигийного прилива в эстуарии р. Северн составляет 14.6 м.

В морях России максимальные приливы наблюдаются в Мезенском зал. Белого моря и в Пенжинской губе Охотского моря. В Мезенском зал. высота прилива в среднем составляет 5–7 м, максимально – до 9 м, в Пенжинской губе – до 14 м [4].

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-05-00209а, 16-35-00344 мол_а).

Мезенский зал. характеризуется малыми и изменчивыми глубинами и большой площадью прибрежной осушки. На ~ 0.9 площади залива глубины < 20 м, а ширина зоны осушки у восточного берега достигает 10 км [1]. Малые глубины и сильные приливные течения обуславливают постоянные изменения рельефа дна, в результате на акватории залива – множество банок и отмелей. В целом, залив характеризуется воронкообразным сужением по направлению от створа мыс Воронов – мыс Конюшин к устью р. Мезени [1].

Как можно заметить, все перечисленные бухты и заливы, где наблюдаются рекордные приливы, характеризуются воронкообразной формой береговой линии и уменьшением глубин к вершине заливов. Ясно, что один из факторов усиления амплитуды прилива в вершинах этих заливов – эффект сближения берегов по ходу распространения приливной волны в залив (гидродинамический эффект конфузора). С другой стороны, глубины во всех случаях уменьшаются к вершинам заливов, а это означает, что при продвижении приливной волны в глубь залива все сильнее действуют силы трения и, как следствие, увеличивается диссипация энергии приливной волны. Таким образом, на эволюцию приливной волны в воронкообразном заливе действуют два противоположных фактора – эффект конфузора и эффект турбулентного трения.

Детально влияние турбулентного трения на распространение длинных гравитационных волн было исследовано в работе [7]. Было показано, что эффект трения существенно зависит от соотношения между турбулентным аналогом числа Рейнольдса $Re_T = HU/A$ и безразмерным волновым числом $\alpha = Hk$ (H – толщина невозмущенного слоя жидкости, U – скорость гравитационных волн, A – коэффициент вертикального турбулентного обмена, k – волновое число). При $O(\alpha^{-5}) < Re_T$ трение несущественно, распространение волны описывается уравнением Кортевега – де Вриза (КдВ). При $O(\alpha^{-1}) < Re_T \leq O(\alpha^{-5})$ трение становится существенным и его учет приводит к уравнению КдВ–Бюргерса. При $O(\alpha^{-5}) \approx Re_T$ возникает интересный случай, когда геометрическая и вязкая дисперсии балансируются. Этот случай подробно изучался в [5]. Наконец, при $Re_T < O(\alpha^{-1})$ комплексная фазовая скорость становится чисто мнимой – свободные волновые движения отсутствуют, динамика свободной поверхности описывается нелинейным диффузионным уравнением параболического типа [6]. Аналог такого уравнения впервые получен в работе [9] в

связи с изучением растекания капли жидкости на горизонтальной плоскости.

Условие $Re_T < O(\alpha^{-1})$ дает ограничение на глубину жидкости в виде $H < O(\sqrt{AT})$ (T – период волны или характерное время изменчивости поля течения). С другой стороны, известно, что при распространении волновых возмущений с периодом T в вязкой жидкости у свободной поверхности формируется пограничный слой Стокса толщиной $h_{St} = \sqrt{AT}$. Слой Стокса – это глубина, на которую диффундирует завихренность от свободной поверхности за период волны [8]. К примеру, для открытого потока и полусуточной приливной волны M_2 глубина h_{St} составляет 12–15 м при характерном значении $A = 10^2$ см²/с, для потока с ледяным покровом h_{St} в 2 раза больше. Таким образом, прибрежные зоны морей и многие водохранилища лежат в пределах слоя Стокса. При глубинах меньше толщины слоя Стокса ($H < h_{St}$) для течений с характерной временной изменчивостью T в уравнениях движения с точностью до $O(Fr^2)$ ($Fr = U/\sqrt{gH}$) балансируются турбулентное трение и градиент давления [3], режим течения становится градиентно-вязким. В этом случае члены с турбулентным трением в уравнении импульса становятся порядка единицы: $Fr^2 Re_T^{-1}/\alpha \approx O(1)$.

Обычно в океанографической литературе anomalously большие амплитуды приливов внутри заливов объясняют явлениями резонанса входящей волны и собственных колебаний залива – сейш. Но это не соответствует действительности. Так, например, для зал. Фанди период одноузловой сейши составляет ~ 4 ч и, естественно, никакого резонанса с полусуточным приливом быть не может.

Основная цель данной статьи состоит в исследовании противоположных эффектов в эволюции приливных волн в воронкообразных заливах – эффекта конфузора и эффекта турбулентного трения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим морской залив, в который входит приливная волна. Предполагается, что вода однородная по плотности. Скорости течения в заливе будем считать небольшими, поэтому нелинейностью в уравнениях движения можно пренебречь. Кроме того, будем предполагать, что глубины в бухте составляют не более нескольких десятков метров, в результате чего ускорением Кориолиса можно также пренебречь. В результате исходная система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + A \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + A \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (2)$$

$$g\rho_0 = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

где u, v – горизонтальные составляющие скорости течения соответственно по осям X и Y ; w – вертикальная составляющая скорости течения; P – давление в жидкости; g – ускорение свободного падения; ρ_0 – плотность воды (принимается постоянной); A – коэффициент вертикального турбулентного обмена (константа). Ось Z направлена вертикально вниз. Начало координат расположено на невозмущенной поверхности водоема.

Граничные условия:

на поверхности моря ($z = \zeta(x, y, t)$) ставятся условие отсутствия воздействия ветра и кинематическое условие:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\zeta} = \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=\zeta} = 0; \quad w|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

на дне ($z = H(x, y)$) ставятся условия прилипания:

$$u|_{z=H} = v|_{z=H} = w|_{z=H} = 0, \quad (5)$$

на береговой границе водоема ($L(x, y) = 0$) – равенство нулю интегрального расхода (полного потока) по нормали \vec{n} к границе:

$$(\vec{S}, \vec{n}) = 0, \quad \text{где } \vec{S} = \int_{\zeta}^H \vec{U} dz, \quad \vec{U} = (u, v). \quad (6)$$

Интегрируя уравнение гидростатики (3) от верхней границы жидкости $z = \zeta(x, y, t)$ до горизонта z , получим для давления в жидкости

$$P(x, y, z, t) = P|_{z=\zeta} + g\rho_0(z - \zeta). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (1) и (2), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + A \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + A \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (9)$$

Будем искать волновые решения системы (8), (9) в виде

$$u = \bar{u} e^{i\omega t}, \quad v = \bar{v} e^{i\omega t}, \quad (10)$$

где \bar{u} и \bar{v} – амплитуды волновых колебаний скорости, ω – частота волны.

Далее ограничимся выкладками только для первого уравнения (8), для уравнения (9) все выкладки проводятся аналогично. Подставляя (10) в (8) и полагая $\zeta = \bar{\zeta} e^{i\omega t}$, получим

$$i\omega \bar{u} = g \bar{\zeta}_x + A \bar{u}_{zz}. \quad (11)$$

Интегрируя линейное уравнение (11) по z с учетом условий (5) относительно \bar{u} , найдем общее решение:

$$\bar{u} = \frac{g \bar{\zeta}_x}{i\omega} \left(1 - \frac{\text{ch} \lambda z}{\text{ch} \lambda H} \right), \quad (12)$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{i\omega}{A}}$. Интегрируя (12) от 0 до H , получим комплексное выражение для амплитуды полного потока по x :

$$\bar{S}_{(x)} = \int_0^H \bar{u} dz = \frac{g \bar{\zeta}_x}{i\omega} \left[H - \frac{1}{\lambda} \text{th}(\lambda H) \right], \quad (13)$$

где th – гиперболический тангенс.

Нижняя граница интегрирования в (13) снесена с поверхности $z = \zeta$ на $z = 0$ в силу предполагаемой малости вертикальных смещений поверхности воды ζ по отношению к общей глубине водоема H .

Проинтегрировав уравнение неразрывности (4) по z от $z = \zeta$ до $z = H$ с учетом граничных условий (5) и условий на поверхности моря, получим уравнение неразрывности в полных потоках:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial S_{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial S_{(y)}}{\partial y} \quad (14)$$

или для амплитуд:

$$i\omega \bar{\zeta} = \frac{\partial \bar{S}_{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{S}_{(y)}}{\partial y}. \quad (15)$$

Подставляя в (15) выражение (13) и аналогичное выражение для $\bar{S}_{(y)}$, получим основное уравнение для амплитуды колебаний уровня воды в водоеме:

$$\frac{\partial}{\partial x} [(g \bar{\zeta}_x) \tilde{H}] + \frac{\partial}{\partial y} [(g \bar{\zeta}_y) \tilde{H}] + \omega^2 \bar{\zeta} = 0, \quad (16)$$

где

$$\tilde{H} = H - \frac{1}{\lambda} \text{th}(\lambda H). \quad (17)$$

Параметр λ в (17) – комплексное число:

$$\lambda = \sqrt{\frac{i\omega}{A}} = \sqrt{\frac{\omega}{2A}} (1 + i) = \alpha (1 + i), \quad \text{где } \alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2A}}. \quad (18)$$

Для определения связи частоты, волнового числа и декремента затухания выделим действи-

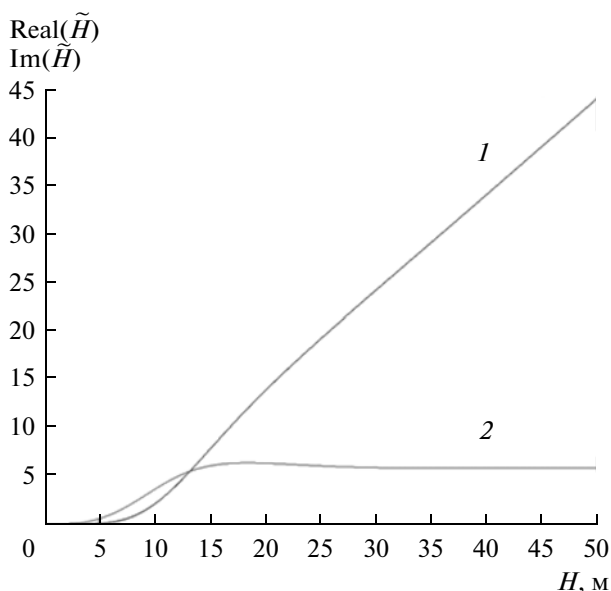


Рис. 1. Графики действительной ($\text{Real}(\tilde{H})$) части (1) и мнимой ($\text{Im}(\tilde{H})$) части (2) редуцированной глубины \tilde{H} (17) в зависимости от H для полусуточной приливной волны при $A = 10^2 \text{ см}^2/\text{с}$.

тельную и мнимую части в выражении для \tilde{H} в (17). Будем иметь с учетом (18)

$$\text{th}(\lambda H) = \frac{\text{th}(\alpha H) + i \text{tg}(\alpha H)}{1 + i \text{tg}(\alpha H) \text{th}(\alpha H)}, \quad (19)$$

где tg – тригонометрический тангенс.

На рис. 1 приведены графики действительной и мнимой частей функции редуцированной глубины \tilde{H} в зависимости от реальной глубины H . Из графиков видно, что при $H > 15$ м зависимость действительной части $\text{Real}(\tilde{H})$ от H практически линейная, а мнимая часть $\text{Im}(\tilde{H})$ при $H > 15$ м асимптотически стремится к константе. Глубина $H \sim 15$ м равна толщине слоя Стокса для полусуточной приливной волны [3], и она фактически разделяет два режима эволюции приливной волны: при $H \gg 15$ м режим движения волны слабовязкий, а при $H < 15$ м турбулентное трение становится существенным.

Чтобы понять, как проявляется действие редуцированной глубины в эволюции волны, рассмотрим одномерный аналог уравнения (16) для случая постоянной глубины бухты:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\text{Real}(\tilde{H}) + i \text{Im}(\tilde{H})) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \right] + \frac{\omega^2}{g} \bar{\zeta} = 0. \quad (20)$$

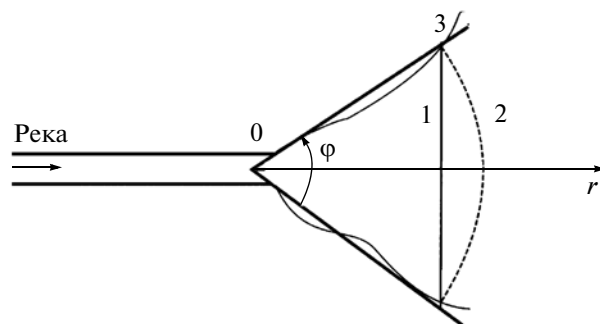


Рис. 2. К постановке задачи. Аппроксимация воронкообразного эстуария угловым сектором. 1 – фронт приливной волны; 2 – аппроксимация фронта волны в полярной системе координат; 3 – береговая линия.

Будем искать волновое решение уравнения (20). Подставляя $\bar{\zeta} \sim e^{ikx}$ в (20), получим дисперсионное соотношение

$$k^2 = \frac{\omega^2}{g(\text{Real}(\tilde{H}) + i \text{Im}(\tilde{H}))}. \quad (21)$$

При глубине бухты $H \gg 15$ м имеем оценку

$$\frac{\text{Im}(\tilde{H})}{\text{Real}(\tilde{H})} \ll 1,$$

и тогда из (21) получим

$$k = \pm \frac{\omega}{\sqrt{g \text{Real}(\tilde{H})}} \left(1 - i \frac{\text{Im}(\tilde{H})}{2 \text{Real}(\tilde{H})} \right). \quad (22)$$

При больших значениях глубин H имеем $\text{th}(\lambda \tilde{H}) \sim 1$, в результате для редуцированной глубины получим выражение

$$\tilde{H} \approx H - \frac{1}{\lambda} = H - \sqrt{\frac{A}{2\omega}} + i \sqrt{\frac{A}{2\omega}}. \quad (23)$$

Таким образом, для больших значений H турбулентное трение также оказывает влияние на эволюцию волны уменьшением реальной глубины на толщину слоя Стокса $h_{\text{St}} \sim \sqrt{\frac{A}{2\omega}}$. Из (23) видно, что асимптота, на которую выходит $\text{Im}(\tilde{H})$ при больших H , есть толщина слоя Стокса h_{St} .

СЕЙШИ И ПРОГРЕССИВНЫЕ ВОЛНЫ В ЭСТУАРИЯХ

Эстуарии имеют воронкообразную форму, поэтому удобно аппроксимировать их в виде сектора круга. Введем полярные координаты r, φ (рис. 2), тогда уравнение (19) в полярных координатах будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \tilde{H}(r, \varphi) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\tilde{H}(r, \varphi) \frac{\partial \bar{\zeta}}{r \partial \varphi} \right) + \frac{\omega^2}{g} \bar{\zeta} = 0. \quad (24)$$

Считая, что уровень $\bar{\zeta}$ мало зависит от угловой координаты φ , осредним уравнение (24) по φ . В результате получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \langle \tilde{H}(r, \varphi) \rangle \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial r} \right) + \frac{\omega^2}{g} \bar{\zeta} = 0, \quad (25)$$

где угловые скобки означают осреднение по углу φ .

Чтобы не загромождать формулы, будем далее опускать угловые скобки в (25), а также черту над $\bar{\zeta}$. Основное уравнение примет такой вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \tilde{H}(r) \frac{d\zeta}{dr} \right) + \frac{\omega^2}{g} \zeta = 0. \quad (26)$$

Граничные условия:

в вершине эстуария ($r = 0$) задаем равенство нулю полного потока, а на внешней мористой границе эстуария ($r = R$) — амплитуду приходящей приливной волны:

$$\left. \frac{d\zeta}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad \zeta|_{r=R} = \zeta_0. \quad (27)$$

Рассмотрим сначала эстуарий постоянной глубины, тогда $\tilde{H}(r) = \tilde{H}_0$. Фундаментальными решениями уравнения (26) в этом случае будут функция Бесселя нулевого порядка $J_0(kr)$ и функция

Неймана нулевого порядка $N_0(kr)$, где $k = \sqrt{\frac{\omega^2}{g\tilde{H}_0}}$.

Если эстуарий аппроксимируется угловым сектором, то функция $N_0(kr)$ отпадает, так как в начале координат ($r = 0$) она имеет логарифмическую особенность. Решением в этом случае может быть только функция $J_0(kr)$. Эта функция в нуле конечна и имеет нулевую производную, т.е. удовлетворяет граничному условию (27). Итак, решением уравнения (26) с граничными условиями (27) будет функция

$$\zeta = C J_0(kr). \quad (28)$$

Так как важно относительное изменение амплитуды приливной волны на входе в бухту и в ее вершине, т.е. соотношение амплитуд на входе и в вершине бухты, то константу C в (28) можно положить равной 1. Это означает, что амплитуда колебания уровня ζ в (28) делится на амплитуду прилива ζ_0 в вершине эстуария.

При аппроксимации эстуария усеченным сектором с границами $r = r_0$ и $r = R$ решение уравнения (26) будет следующее:

$$\zeta = C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr), \quad (29)$$

которое с учетом граничного условия

$$\left. \frac{d\zeta}{dr} \right|_{r=r_0} = 0 \quad (30)$$

примет вид

$$\zeta = C_1 \left[J_0(kr) - \frac{J_1(kr_0)}{N_1(kr_0)} N_0(kr) \right], \quad (31)$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка, N_1 — функция Неймана первого порядка.

Аналогично (28) константу C_1 в (31) можно положить равной 1. Расчеты по формуле (31) при разных значениях начального радиуса сектора $r_0 = 1, 5, 10, 15$ км показали, что решения (31) и (28) отличаются незначительно.

Волны в бухтах могут быть стоячие (сейши) и прогрессивные, когда гребень волны движется с фазовой скоростью. Но в чистом виде, как правило, ни того ни другого типов волн в эстуариях нет, а наблюдаются волны смешанного типа — прогрессивно-стоячие. Сейшевые колебания — собственные колебания воды в бухте, и если период приходящей приливной волны совпадает с периодом сейш, то возникает резонанс и амплитуда колебания поверхности моря существенно возрастает. Найдем периоды сейшевых колебаний для эстуария с постоянной глубиной. Будем считать, что глубина в эстуарии существенно больше толщины слоя Стокса, и тогда в функции \tilde{H}_0 в уравнении (26) мнимой частью можно пренебречь.

Для сейш, помимо граничного условия (27) при $r = 0$, должно выполняться аналогичное условие отсутствия полного интегрального расхода на внешней границе бухты при $r = R$:

$$\left. \frac{d\zeta}{dr} \right|_{r=R} = 0. \quad (32)$$

Из (28) и (32) следует условие

$$J_1(kR) = 0, \quad (33)$$

из которого видно, что периоды сейш определяются нулями γ_i функции Бесселя $J_1(kR)$:

$$kR = \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

Учитывая выражение для k , из (34) получим формулу для периодов сейш в клиновидной бухте длины R :

$$T_i = \frac{2\pi R}{\gamma_i \sqrt{g\tilde{H}_0}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

Значения первых пяти нулей функции $J_1(x)$ следующие:

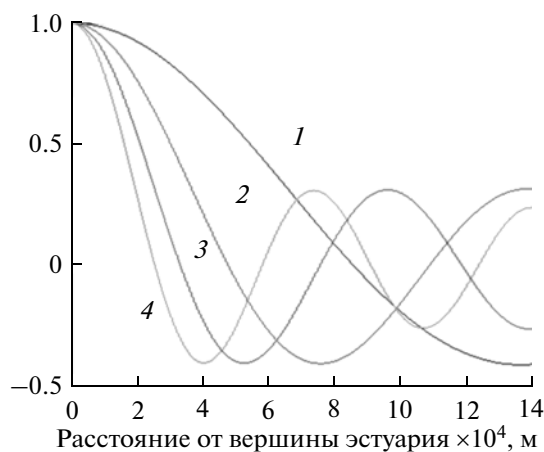


Рис. 3. Первые четыре (1–4) моды сейшевых колебаний в эстуарии постоянной глубины $H = 30$ м. Вертикальная координата – ζ/ζ_0 .

$$\gamma_1 = 3.83, \quad \gamma_2 = 7.01, \quad \gamma_3 = 10.17, \\ \gamma_4 = 13.32, \quad \gamma_5 = 16.47.$$

Если сравнивать (35) с формулой Мериана для периодов продольных сейш в прямоугольном бассейне длины R :

$$T_n = \frac{2R}{n\sqrt{gH_0}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (36)$$

то видно, что в глубоководном воронкообразном заливе период первой моды сейшевых колебаний будет меньше периода сейши, вычисленной по формуле Мериана (36), в 0.82 раза, второй моды – в 0.89, третьей – в 0.93 раза. Но при глубинах ~ 20 м на движение приливной волны начинают существенно влиять силы трения. Действительная часть \tilde{H}_0 в (35) будет составлять всего ~ 13 м. В результате период первой моды в клиновидной бухте будет практически такой же, как в прямоугольной области, рассчитанной по формуле Мериана (36). Период второй моды будет больше уже на $\sim 10\%$ периода второй моды по формуле (36).

Заметим, что для стоячих волн, каковыми являются сейши, должно выполняться условие сохранения объема воды в бухте:

$$\int_0^R \zeta(r) r dr = 0. \quad (37)$$

Учитывая свойство бесселевых функций:

$$\int r J_0(kr) dr = \frac{1}{k} r J_1(kr),$$

и соотношение (33), получим условие сохранения объема воды в бухте (37).

В реальности глубина в бухтах не бывает постоянной и увеличивается в сторону моря. В общем случае функции $\tilde{H}(r)$ уравнение (26) можно решить только численно, но есть частный случай, когда решение уравнения (26) можно найти также аналитически при переменной функции $\tilde{H}(r)$. Если зависимость $\text{Real}(\tilde{H}(r))$ от r можно аппроксимировать степенной функцией:

$$\text{Real}(\tilde{H}(r)) = H(r) = H_0 r^{-2\alpha}, \quad (38)$$

то тогда уравнение (26) сводится к уравнению Ломмеля:

$$\frac{d^2 \zeta}{dr^2} + \frac{1-2\alpha}{r} \frac{d\zeta}{dr} + \left[(\beta \gamma r^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - v \gamma^2}{r^2} \right] \zeta = 0, \quad (39)$$

где

$$\gamma = 1 + \alpha, \quad v = \alpha/\gamma, \quad \beta = \frac{1}{\gamma} \frac{\omega}{\sqrt{gH_0}}.$$

Решением уравнения (39) будет функция:

$$\zeta = C_1 r^\alpha J_\nu(\beta r^\gamma) + C_2 r^\alpha N_\nu(\beta r^\gamma), \quad (40)$$

где C_1 и C_2 – константы интегрирования. Соотношения констант C_1 и C_2 находятся из граничного условия (30).

На рис. 3 приведены первые четыре моды сейшевых колебаний в эстуарии с глубиной 30 м. Из рисунка видно, что при глубинах, больших слоя Стокса, на форму сейшевых волн основное влияние оказывает эффект конфузности эстуария. Однако, если глубина в эстуарии непостоянна и уменьшается в вершине эстуария, то асимметричность сейш может оказаться обратной – на входе в эстуарий амплитуда сейш может быть больше, нежели в его вершине из-за действия трения.

На рис. 4 приведены результаты расчета прогрессивных волн, входящих в эстуарий при глубинах, сравнимых с толщиной слоя Стокса. Наблюдается интересный эффект – на входе в эстуарий амплитуда входящих волн сначала уменьшается из-за действия сил трения, но затем ближе к вершине эстуария начинает превалировать эффект конфузора и амплитуда волны вновь начинает расти. В результате амплитуда характеризуется участком декремента и участком инкремента (рис. 5).

На рис. 6 приведены результаты расчета приливных колебаний уровня для глубоководного эстуария с глубинами больше толщины слоя Стокса. Видно, что амплитуда колебаний уровня увеличивается к вершине эстуария вследствие проявления эффекта конфузности эстуария. Однако, если глубины в эстуарии меньше толщины слоя Стокса, то эффект турбулентного трения

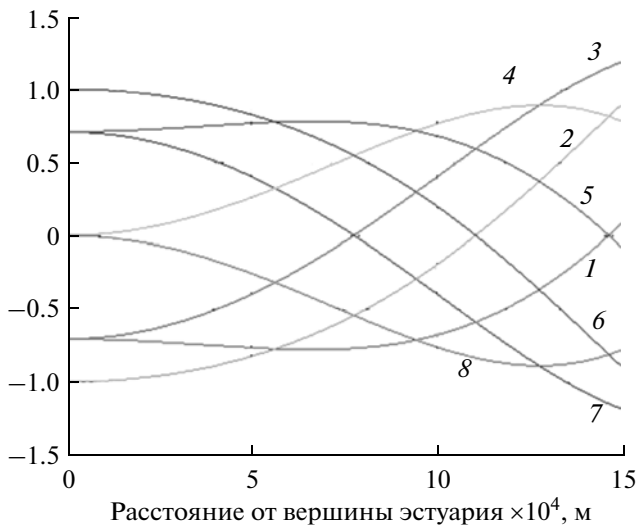


Рис. 4. Колебания уровня моря ζ/ζ_0 (вертикальная координата) в эстуарии при $H = 10$ м (волна входит справа). Положения уровня моря (1, 2, 3, ..., 8) за период прилива с шагом $\pi/4$.



Рис. 5. Пространственное распределение декремента–инкремента приливных волн, представленных на рис. 4.

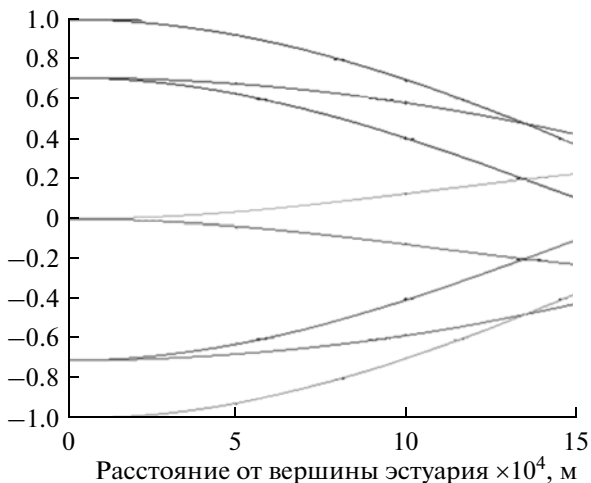


Рис. 6. Приливные колебания уровня моря ζ/ζ_0 в глубоководном эстуарии при $H = 20$ м (волна входит справа). Положения уровня за период волны с шагом $\pi/4$.

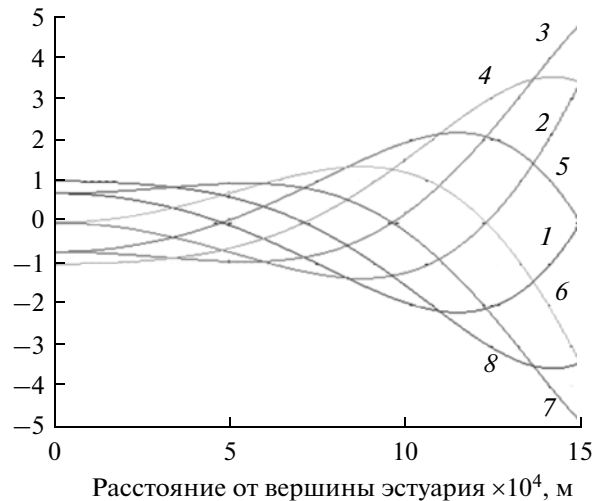


Рис. 7. Приливные колебания уровня моря ζ/ζ_0 в мелководном эстуарии при $H = 7$ м (волна входит справа). Положения уровня моря (1, 2, 3, ..., 8) за период прилива с шагом $\pi/4$.

из-за мелководности становится главенствующим и амплитуда волн к вершине эстуария существенно уменьшается (рис. 7).

При совпадении периода приходящей волны с периодом сейш должно происходить резонансное усиление волн. На рис. 8 приведены результаты расчета эволюции прогрессивной волны в эстуарии с периодом первой моды сейшевых колебаний на рис. 3. Из рис. 8 видно, что колебания имеют вид квазистоячих, т.е. сейшевых, волн. Амплитуда колебаний в вершине эстуария уве-

личивается в 2.5 раза по отношению к амплитуде входящей волны.

ВЫВОДЫ

Как следует из полученных результатов, при средних глубинах, существенно больших толщины слоя Стокса, амплитуда приливной волны при входе в воронкообразный эстуарий увеличивается. На первом месте по значимости в этом случае — эффект конфузора, т.е. сужение берегов эстуария

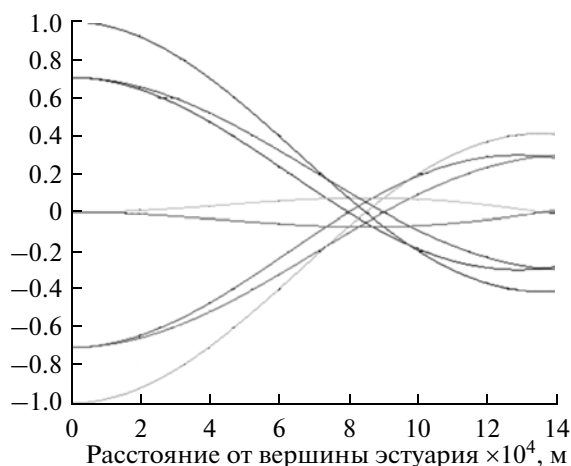


Рис. 8. Резонанс приливной волны с первой модой сейшевых колебаний при $H = 30$ м (волна входит справа). Положения уровня за период волны с шагом $\pi/4$.

к его вершине. Турбулентное трение также действует, но имеет в этом случае второстепенное значение, немного уменьшая амплитуду прилива в вершине эстуария по сравнению с идеальной жидкостью без трения.

При глубинах, меньших толщины слоя Стокса, турбулентное трение становится преобладающим над эффектом конфузора и амплитуда приливной волны уменьшается при продвижении к вершине эстуария.

Имеет место промежуточный случай при глубинах порядка толщины слоя Стокса. В этом случае при входе волны в эстуарий сильнее действует эффект трения и амплитуда приливной волны уменьшается, но затем по мере продвижения волны в глубь эстуария к его вершине над трением начинает преобладать эффект конфузора и амплитуда приливной волны вновь увеличивается.

Сейшевые колебания в воронкообразных эстуариях имеют несимметричный характер — амплитуды сейшевых колебаний в вершине эстуария существенно больше амплитуд сейш на входе в эстуарий. Для сейш, таким образом, также проявляется эффект конфузора. При совпадении периода приливной волны с периодом сейш в эсту-

арии возникает резонансное усиление входящей приливной волны в вершине эстуария.

Возвращаясь к феномену зал. Фанди, отметим, что средняя глубина залива составляет ~ 32 м и длина ~ 130 км. Следовательно, в соответствии с формулой (35) период первой моды сейшевых колебаний будет составлять ~ 3.8 ч, т.е. резонанс с полусуточным приливом отсутствует и в усилении амплитуды прилива в вершине залива главную роль должен играть эффект конфузора, а не резонанс, как это часто утверждается в океанографической литературе. На это еще накладывается эффект нелинейности, который в данной постановке задачи не учитывается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабков А.И.* Гидрология Белого моря. СПб.: Зоологический ин-т РАН, Беломорская биол. станция им. акад. О.А. Скарлато, 1998. С. 94.
2. *Зырянов В.Н.* Теория установившихся океанических течений // Срачиваемые асимптотические разложения: основы теории и приложения к задачам динамики океана. Л.: Гидрометеиздат, 1985. С. 248.
3. *Зырянов В.Н.* Топографические вихри в динамике морских течений. М.: ИВП РАН, 1995. С. 239.
4. *Шокальский Ю.М.* Океанография. Л.: Гидрометеиздат, 1959. С. 537.
5. *Djordjevic V.D.* On the dissipation of interfacial and internal long gravity waves // ZAMP. 1980. V. 31. № 3. P. 318 – 331.
6. *Djordjevic V.D.* On the effect of viscosity on some non-wave motions of liquids with the free surface // Acta Mech. 1983. V. 48. № 3–4. P. 219–226.
7. *Kakutani T., Matsuuchi K.* Effect of viscosity on long gravity waves // J. Phys. Soc. Japan. 1975. V. 39. № 1. P. 237–246.
8. *Lighthill J.* Waves in Fluids. Cambridge: Univ. Press, 1978. P. 504.
9. *Nakaya C.* Spread of fluid drops over a horizontal plane // J. Phys. Soc. Japan. 1974. V. 37. № 2. P. 539–543.
10. *Tatusaburo Isaji, Spaulding M.L.* A model of the tidally induced residual circulation in the Gulf of Maine and Georges Bank // J. Phys. Oceanogr. 1984. V. 14. P. 1119–1126.