

ФИЗИКА МОРЯ

УДК 551.465.11

В. Ф. КОЗЛОВ, М. А. СОКОЛОВСКИЙ

СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ
СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ
(ГЕОСТРОФИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НА β -ПЛОСКОСТИ)*Дальневосточный государственный университет**Тихоокеанский океанологический институт ДВНЦ АН СССР*

В геострофическом приближении на β -плоскости формулируется задача о движении зонального устойчиво стратифицированного потока жидкости над изолированным возмущением топографии дна. Решение строится в виде ряда по степеням логарифма локальной глубины. Показывается, что в случае линейной стратификации над препятствием формируется трехмерный циклонический (антициклонический) вихрь, интенсивность которого ослабевает (усиливается) с глубиной для восточного (западного) набегающего с постоянной скоростью потока.

1. В последнее десятилетие в геофизической гидродинамике заметно усилился интерес к проблеме движения вращающейся стратифицированной жидкости над неровным дном. В подавляющем большинстве работ, посвященных этому вопросу, рассматриваются квазигеострофические инерционные модели при постоянном параметре Кориолиса Ω (сводка решений при этом предположении задач имеется в [2]). Гораздо меньше исследований выполнено для β -плоскости, т. е. с учетом широтного изменения Ω . Мак-Картни [2] рассмотрел двухслойную инерционную квазигеострофическую модель в случае расположенного на дне препятствия в форме прямого кругового цилиндра. В более поздней работе [3] этот же автор изучил случай непрерывной, но слабой стратификации, когда в уравнении для плотности не учитывается вертикальная адвекция. В такой постановке поле течений оказалось независимым от вертикальной стратификации набегающего потока. В статье [4] рассматривается аналогичная модель, причем в уравнении для плотности линеаризован член с вертикальной адвекцией относительно вертикального градиента невозмущенного поля плотности и осуществляется снос граничных условий на дне на невозмущенную горизонтальную плоскость. В качестве конкретного примера рассматривалось обтекание меридионального подводного хребта кинематически однородным и линейно стратифицированным потоком. И наконец, недавно опубликована работа [5], где в рамках квазигеострофической инерционной модели исследуется случай очень сильной стратификации.

Во всех упомянутых работах использовались формы рельефа, допускающие разрыв наклонов поверхности дна. При таких условиях для устранения возникающих особенностей в поле скоростей модель с необ-

ходимостью должна быть квазигеострофической (инерционной или вязкой).

В настоящем сообщении рассматривается чисто геострофическая модель на β -плоскости. Это означает, что дно $z=H(x, y)$ представляет собой достаточно гладкую поверхность, а волны Россби всех типов отфильтрованы. Геометрия задачи схематически показана на рис. 1. Исходные предположения обычно для теории идеального термоклина: геострофичность, гидростатичность, несжимаемость, стационарность. На верхней границе ставится условие твердой крышки. Обозначения и направления координатных осей традиционны.

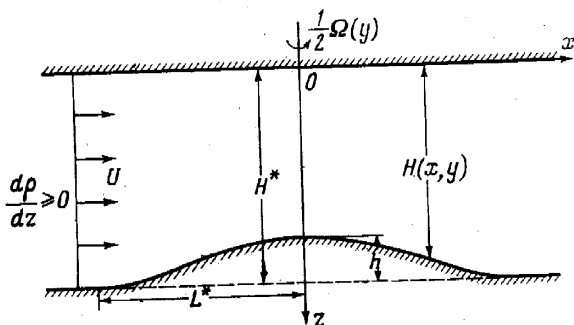


Рис. 1. Геометрия задачи

2. Будем рассматривать класс движений, для которых поле гидродинамического давления допускает представление $p = \rho_0 g z + \delta^* g H^* \cdot Q(\xi, \eta, \zeta)$ с безразмерными переменными $\xi = \ln[H^{*-1} H(x, y)]$; $\eta = \ln[\Omega^{*-1} \Omega(y)]$, $\zeta = z[H(x, y)]^{-1}$, где звездочками отмечены характерные значения глубины, параметра Кориолиса и возмущения плотности; ρ_0 — постоянная. Удобно ввести вспомогательную функцию

$$S(\xi, \eta, \zeta) = \int_0^{\zeta} (Q_{\xi} - \zeta Q_{\zeta}) d\zeta. \quad (1)$$

Из уравнений геострофического движения, неразрывности и гидростатики легко получаются выражения для трех составляющих вектора скорости и для плотности [1]:

$$u = -(\rho_0 \Omega)^{-1} \delta^* g H^* (H^{-1} H_y S_{\zeta} + \Omega^{-1} \Omega_y Q_{\eta}), \quad (2)$$

$$v = (\rho_0 \Omega)^{-1} \delta^* g H^* H^{-1} H_x S_{\zeta}, \quad (3)$$

$$w = (\rho_0 \Omega^2)^{-1} \delta^* g H^* H_x \Omega_y S, \quad (4)$$

$$\rho = \rho_0 + H^{-1} \delta^* H^* Q_{\zeta}. \quad (5)$$

Подстановка этих соотношений в условие несжимаемости приводит к уравнению

$$L(Q, S) \equiv Q_{\eta} S_{\zeta\zeta} - Q_{\eta\zeta} S_{\zeta} - Q_{\zeta\zeta} S = 0, \quad (6)$$

которое должно интегрироваться при граничных условиях

$$S = 0, \quad \zeta = 0; \quad S = -Q_{\eta}, \quad \zeta = 1. \quad (7)$$

Необходимо также задать дополнительное граничное условие в области с невозмущенным рельефом дна:

$$Q = Q_0(\eta, \zeta), \quad \xi = 0. \quad (8)$$

Таким образом, помимо кинематических граничных условий (7), представляющих собой соответственно условие твердой крышки и условие безотрывного обтекания дна, должна задаваться еще структура полей плотности и зонального движения при $H=H^*$.

Решение задачи (1), (6) — (8) ищем в виде степенных рядов

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\eta, \zeta) \xi^n, \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\eta, \zeta) \xi^n. \quad (9)$$

Подставляя эти выражения в уравнения и граничные условия, получим последовательность линейных относительно S_n задач:

$$L(Q_0, S_n) = G_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (10)$$

$$S_n = 0, \quad \zeta = 0; \quad S_n = -Q_{n,\eta}, \quad \zeta = 1, \quad (11)$$

где $G_n = \sum_{m=0}^{n-1} L(Q_{n-m}, S_m)$, $n \geq 1$ и $G_0 = 0$, причем в силу (1) справедливо соотношение

$$Q_{n+1} = \frac{1}{n+1} (S_{n,\zeta} + \zeta Q_{n,\zeta}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Вопрос об однозначной разрешимости задач (10), (11), равно как и о сходимости рядов (9), тесно связан с анализом соответствующей задачи Штурма-Лиувилля, исследование которой при произвольных $Q_0(\eta, \zeta)$ представляет большие трудности. Мы будем в дальнейшем предполагать однозначную разрешимость задач (10), (11) и, в частности, выполненным условие $Q_{0,\eta} \neq 0$.

Пусть $M(\eta, \zeta)$ и $N(\eta, \zeta)$ — частные решения однородного уравнения (10), удовлетворяющие крайним условиям $M(\eta, 0) = 0$, $M(\eta, 1) = 1$ и $N(\eta, 0) = 1$, $N(\eta, 1) = 0$. Определим функцию Грина

$$K(\eta, \zeta; \zeta') = \frac{1}{W(\eta, \zeta')} \begin{cases} M(\eta, \zeta) N(\eta, \zeta'), & \zeta \leq \zeta' \\ M(\eta, \zeta') N(\eta, \zeta), & \zeta > \zeta' \end{cases}$$

где $W(\eta, \zeta) = MN_{\zeta} - M_{\zeta}N$ — определитель Вронского. Тогда решение задачи (10), (11) примет вид

$$S_n(\eta, \zeta) = -Q_{n,\eta}(\eta, 1) M(\eta, \zeta) + \int_0^1 K(\eta, \zeta; \zeta') \frac{G_n}{G_{0,\eta}}(\eta, \zeta') d\zeta'. \quad (13)$$

Соотношения (9), (12), (13) исчерпывают формальный алгоритм. Построив Q и S , по формулам (2) — (5) определяем поля скорости и плотности при произвольном достаточно гладком возмущении рельефа дна. Не представляет труда вычисление интегральных характеристик потока (интегральная функция тока, потенциальная энергия, массодержание); например, для интегральной функции тока имеем

$$\Psi(x, y) = \frac{\delta^* g H^{*2}}{\rho_0 \Omega^*} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\eta) \xi^n, \quad (14)$$

где $\Phi_0(\eta) = \int_0^{\eta} e^{-\eta} \left(\int_0^1 Q_{0,\eta}(\eta, \zeta) d\zeta \right) d\eta + \text{const}$,

$$\Phi_{n+1}(\eta) = -\frac{e^{-\eta}}{n+1} \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} Q_{n-m,\eta}(\eta, 1), \quad n \geq 0.$$

3. Приведем пример реализации изложенного выше алгоритма для случая, когда невозмущенный устойчиво стратифицированный поток представляет зональное течение с постоянной скоростью U . При этих условиях $Q_0(\eta, \zeta) = -0,5 k^{-2} + R(\zeta)$. $k = k_0 e^{-\eta}$, где, согласно (5), функция $R(\zeta)$ характеризует стратификацию невозмущенного потока. Основным внешним параметром задачи является

$$k_0 = \Omega^{*-1} [\delta^* g H^* \beta (\rho_0 U)^{-1}]^{-1/2}.$$

Оператор (6) принимает вид $L(Q_0, S) = -k^2 S_{\zeta\zeta} - R''(\zeta) S$. Рассмотрим случай, когда фундаментальная система решений может быть выражена через элементарные функции. Пусть в невозмущенном потоке ($\xi=0$) вертикальное распределение плотности подчиняется гиперболическому закону

$$\rho = \rho_0 + \delta^* \frac{\zeta - 1}{1 + \gamma \zeta}, \quad \frac{d\rho}{dz} = \frac{\delta^*}{H^*} \frac{1 + \gamma}{(1 + \gamma \zeta)^2}, \quad \zeta = \frac{z}{H^*}.$$

Параметр $\gamma > 0$ определяет степень отклонения профиля от линейного, который получается в пределе $\gamma \rightarrow 0$. Легко проверить, что для этого случая функцию $R(\xi)$ можно принять в форме

$$R(\zeta) = -\gamma^{-2} (1 + \gamma) \ln(1 + \gamma \zeta) + \gamma^{-1} \zeta + 0,5. \quad (15)$$

Фундаментальная система решений и вронскиан имеют вид

$$M(\eta, \zeta) = \left(\frac{1 + \gamma \zeta}{1 + \gamma} \right)^{1/2} \frac{\sin[\omega \ln(1 + \gamma \zeta)]}{\sin[\omega \ln(1 + \gamma)]}, \quad (16)$$

$$N(\eta, \zeta) = (1 + \gamma \zeta)^{1/2} \frac{\sin \left[\omega \ln \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma \zeta} \right) \right]}{\sin[\omega \ln(1 + \gamma)]}, \quad (17)$$

$$W(\eta, \zeta) = -\frac{\gamma \omega}{(1 + \gamma)^{1/2} \sin[\omega \ln(1 + \gamma)]}, \quad \omega = \frac{1}{\gamma} \left| k^2 (1 + \gamma) - \frac{\gamma^2}{4} \right|^{1/2}. \quad (18)$$

При $k^2 < 1/4 \gamma^2 (1 + \gamma)^{-1}$ в формулах (16) — (18) следует заменить круговые синусы на гиперболические. Простой анализ показывает, что (16) — (18) являются непрерывными функциями параметра k^2 , за исключением точек $\omega \ln(1 + \gamma) = n\pi$, $n \geq 1$, в которых решение не существует. Есть основания полагать, что требованию $Q_\eta \neq 0$ будут удовлетворять лишь решения, полученные для $-\infty < k^2 < \gamma^2 (1 + \gamma)^{-1} \{1/4 + \pi^2 [\ln \cdot (1 + \gamma)]^{-2}\}^{1/2}$. При $\gamma \rightarrow 0$ это условие переходит в $-\infty < k^2 < \pi^2$, которое в квазигеострофическом приближении исключает внутренние волны Россби [4].

Для линейной стратификации ($\gamma \rightarrow 0$) соотношения (15) — (18) соответственно переходят в

$$R(\zeta) = \frac{1}{2} (\zeta - 1)^2, \quad M = \frac{\sin k \zeta}{\sin k}, \quad N = \frac{\sin k(1 - \zeta)}{\sin k}, \quad W = -\frac{k}{\sin k}.$$

В этом случае были вычислены три первых члена разложений (9) и результаты применены для рельефа дна

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 - h \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{L^2} \right)^2, & x^2 + y^2 \leq L^2 \\ 1, & x^2 + y^2 > L^2. \end{cases}$$

При $h > 0$ имеем осесимметричную подводную возвышенность с максимальной высотой hH^* , а при $h < 0$ подводную котловину. Иллюстратив-

ные расчеты были выполнены при значениях параметров $\varphi^* = 30^\circ$, $L^* = 100$ км, $H^* = 4$ км, $|U| = 10$ см·сек⁻¹, $h = 0,025$, $k_0 = \pi/2$, что соответствует возмущению плотности $\delta^* = 1,65 \cdot 10^{-3}$ г·см⁻³ и числу Россби $\epsilon = |U|/L^* \Omega^* = 1,37 \cdot 10^{-2}$.

На рис. 2 приведены вычисленные линии тока (изобары) горизонтального движения на горизонтах $z/H^* = 0$ (а), 0,6 (б), $1-h$ (в) для невозмущенного восточного потока ($U > 0$), причем в силу симметрии показана лишь правая половина поля давления. Хорошо видно, что воз-

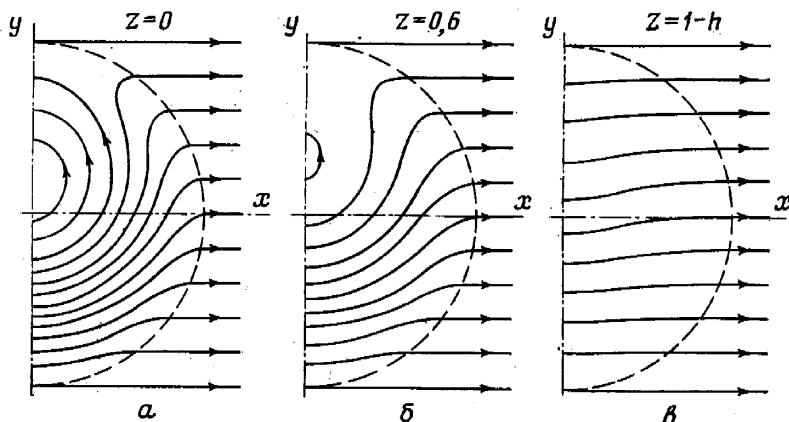


Рис. 2. Восточный поток ($U > 0$) над осесимметричной подводной возвышенностью высотой h . Линии тока на безразмерных горизонтах
а — $z=0$; б — $z=0,6$; в — $z=1-h$

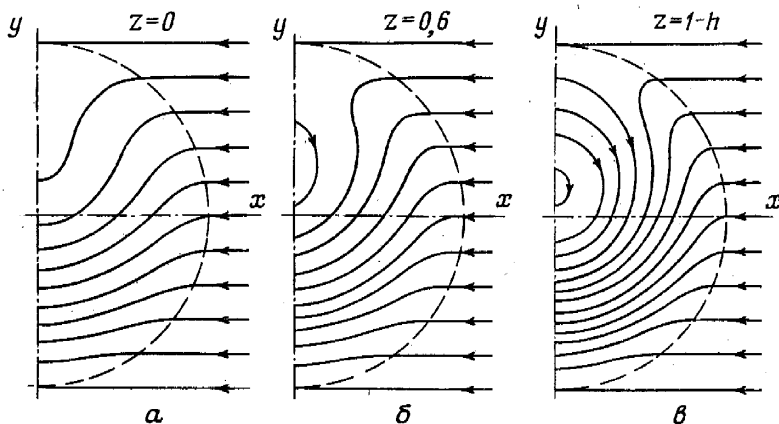


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, но для западного потока ($U < 0$)

мущение рельефа сильнее всего проявляется на поверхности и очень слабо на уровне вершины подводной возвышенности. Над северным склоном формируется циклоническое вихревое образование, ослабевающее с глубиной и исчезающее на некотором промежуточном горизонте ($z/H^* > 0,6$).

На рис. 3 представлены картины изобар на тех же горизонтах в случае западного потока ($U < 0$). Здесь влияние рельефа и стратификации качественно имеют иной характер. Антициклонический вихрь над северным склоном имеет максимальное развитие у дна и постепенно ослабевая к поверхности, исчезает при $z/H^* < 0,4$. Характер интегральной циркуляции, определяемой формулой (14), в обоих случаях близок к соответствующим картинам горизонтальных течений на промежуточном го-

ризонте $z/H^* = 0,6$. Характерные изменения скорости при этом имеют порядок U .

Различную реакцию геострофического стратифицированного потока в зависимости от его направления можно объяснить следующим образом. Из структуры выражений (2) и (3) следует, что горизонтальное движение складывается из двух компонент: пропорционального $\Omega_z \equiv \beta$ планетарного зонального движения и пропорционального наклону дна топографического движения вдоль изобат, причем последнее при $S_z > 0$ является антициклоническим над возвышенностями и циклоническим — над котловинами. При смене знака S_z направление топографического движения меняется на противоположное. Как показывают расчеты [1], при $\xi < 0$ ($H < H^*$) и $U > 0$ величина S_z положительна и убывает с глубиной, при $U < 0$ она становится отрицательной и по абсолютной величине с глубиной возрастает. Это означает, что интенсивность топографического движения в восточном набегающем потоке с глубиной ослабевает, а в западном — усиливается. Проявление этого эффекта мы и наблюдаем на рис. 2, 3. Заметим, что в квазигеострофических инерционных моделях при наличии волн Россби независимо от направления потока стратификация ослабляет возмущения с удалением от дна [2, 4].

Таким образом, в результате взаимодействия геострофического устойчиво стратифицированного потока с локальным возмущением глубины могут возникать трехмерные вихревые образования, интенсивность которых ослабевает (усиливается) с глубиной для восточного (западного) набегающего потока.

Разумеется, рассмотренный в работе пример для предельного случая $\gamma \rightarrow 0$ является весьма грубым приближением с точки зрения применимости к океану. В случае, когда функция $R(\zeta)$ имеет более общий вид (15), предложенная модель может быть использована для исследования влияния мезомасштабного топографического возмущения на течения, близкие к зональным (например, Антарктическое круговое течение).

В заключение авторы благодарят А. А. Скотникову и Н. А. Каширину, выполнивших необходимые расчеты на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов В. Ф. 1977. О геострофическом движении стратифицированной жидкости над неровным дном. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 13, № 9.
2. McCartney M. S. 1975. Inertial Taylor columns on a beta-plane. J. Fluid Mech., 68, p. 1.
3. McCartney M. S. 1976. The interaction of zonal currents with topography with applications to the Southern Ocean. Deep-Sea Res., 23, No. 5.
4. Janowitz G. S. 1975. The effect of bottom topography on a stratified flow in the beta-plane. J. Geophys. Res., 80, No. 30.
5. Johnson E. R. 1977. Stratified Taylor columns on a beta-plane. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 9, No. 2.

Поступила в редакцию
1.IX.1977

V. F. KOZLOV, M. A. SOKOLOVSKY

GEOSTROPHIC MOTION OF STRATIFIED FLUID OVER AN UNEVEN BOTTOM (GEOSTROPHIC APPROXIMATION ON THE β -PLANE)

Summary

The problem of a steady flow in the beta-plane of a zonal stably stratified current over an isolated topography is formulated in the geostrophic approximation. For the case of an unshered linearly stratified flow the solution is obtained in the power series form. It is shown that over an appropriate parameters range above the bottom perturbation a three-dimensional cyclonic (anticyclonic) vortex is formed whose strength decreases (increases) with depth for an eastward (westward) constant-velocity flow.