

М.А. СОКОЛОВСКИЙ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ВИХРЕВЫХ ДВИЖЕНИЙ В ОКЕАНЕ МЕТОДОМ КОНТУРНОЙ ДИНАМИКИ

Метод контурной динамики обобщается на случай трехслойной устойчиво стратифицированной жидкости. Приводятся примеры использования предложенного алгоритма в задачах о развале неустойчивого трехслойного вихря, о топографическом циклогенезе в кинематически однородном стратифицированном зональном потоке над изолированным подводным препятствием и о взаимодействии двух трехслойных вихрей — модонов.

1. Введение. Метод контурной динамики (МКД) [1] более чем за десятилетний период своего существования значительно усовершенствовался и нашел многочисленные приложения в динамике плазмы, в теории плоских вихревых движений несжимаемой идеальной жидкости, а также в геофизической гидродинамике. Наиболее полные обзоры работ, связанных с применением МКД, содержатся в [2, 3]. Одним из возможных обобщений метода является его распространение на случай стратифицированной жидкости. В [4] предложена квазигеострофическая модель непрерывно стратифицированного (а не трехслойного, как это ошибочно указано в [2]) океана с произвольной заданной частотой плавучести $N(z)$. Однако при численном решении задач в рамках постановки [4] возникают трудности, связанные с дискретизацией по вертикали. Их можно избежать на моделях слоисто-стратифицированной жидкости со ступенчатым профилем плотности в направлении силы тяжести. Первая двухслойная версия МКД предложена в [5], позднее аналогичные модели были независимо разработаны авторами [6] и [7]. В настоящей работе, представляющей собой расширенное изложение доклада [8], делается следующий шаг — переход к трехслойной модели, более реалистично отражающей структуру термоклина. В [9], где исследуется устойчивость квазигеострофического трехслойного течения в зональном канале, отмечается, что хотя нет полной аналогии между моделями непрерывно стратифицированного и трехслойного потоков, последняя может использоваться для качественного описания трех первых нормальных мод непрерывной системы.

Приведенные ниже примеры относятся к моделированию процессов распада неустойчивых вихрей, формирования вихревой структуры в зональном потоке над изолированным подводным препятствием и взаимодействия двух трехслойных вихрей — модонов, вертикальная структура которых представляется собственными векторами соответствующей спектральной задачи. Термин "модон" в данной статье понимается в смысле работы [10].

2. Постановка задачи и описание алгоритма. Рассмотрим модель трехслойного океана с однородными по плотности слоями и произвольными, отличными от нуля, толщинами h_i ($i = 1, 2, 3$). В квазигеострофическом приближении при отсутствии внешних воздействий выполняются послойно законы сохранения [11]

$$\frac{d_i}{dt} \neq \Pi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

для компонент трехмерного вектора потенциального вихря Π , связанного в прибли-

жении твердой крышки с соответствующим вектором возмущения гидродинамического давления (относительно давления в состоянии гидростатического равновесия) линейным дифференциальным оператором

$$\Pi = \Delta p + A p, \quad \Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{F_1}{h_1} & \frac{F_1}{h_1} & 0 \\ \frac{F_1}{h_2} & \frac{F_1 + F_2}{h_1 + h_2} & \frac{F_2}{h_2} \\ 0 & \frac{F_2}{h_3} & -\frac{F_2}{h_3} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $F_n = \rho_0 (fL)^2 (g \Delta \rho_n H)^{-1}$, $\Delta \rho_n = \rho_{n+1} - \rho_n$, $n = 1, 2$. Здесь ρ_i ($i = 1, 2, 3$) — плотности жидкости в слоях, $H = h_1 + h_2 + h_3$ и L — общая глубина и характерный горизонтальный масштаб соответственно, g — ускорение свободного падения, f — предполагаемый постоянным параметр Корниолиса, ρ_0 — средняя плотность жидкости; $\Delta \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$, $d_i / dt \equiv \partial / \partial t - (\partial p_i / \partial y) \partial / \partial x + (\partial p_i / \partial x) \partial / \partial y$ — плоские операторы Лапласа и полной производной по времени. Для границ раздела между слоями имеем $\eta_i(x, y, t) = F_i(p_{n+1} - p_n)$, $i = 1, 2$.

Применение методики разделения переменных, подробно изложенной в [12], приводит соотношение (2) к виду

$$\Phi = \Delta \Phi + D \Phi, \quad (3)$$

где $p = Q \Phi$, $\Phi = S \Pi$, $D = \lambda_i E$,

$$Q = (q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{h_3 \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} & -\frac{F_1}{h_1 \lambda_3} \\ 1 & \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} (h_3 \lambda_3 + \frac{F_2}{h_2}) & -(\frac{F_1}{h_1 \lambda_3} + 1) \\ 1 & \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} (h_3 \lambda_3 + \frac{F_2}{h_2} + \lambda_2 + \frac{F_1(h_1 + h_2)}{h_1 h_2}) & -(\frac{F_1}{h_1 \lambda_3} + 1 + \frac{h_2}{F_2} (\lambda_3 + \frac{F_1(h_1 + h_2)}{h_1 h_2})) \end{pmatrix},$$

$$S = Q^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ -\frac{h_2}{F_2} (\lambda_3 + \frac{F_1(h_1 + h_2)}{h_1 h_2}) & \frac{h_2}{F_2} (\lambda_3 + \frac{F_1(h_1 + h_2) + F_2 h_1}{h_1 h_2}) & -1 \\ -\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} (\lambda_2 + \frac{F_1(h_1 + h_2)}{h_1 h_2}) & \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} (\lambda_2 + \frac{F_1(h_1 + h_2) + F_2 h_1}{h_1 h_2}) & -\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{F_2}{h_2} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{F_1}{h_1} + \frac{F_1 + F_2}{h_2} + \frac{F_2}{h_3} \mp \left[\left(\frac{F_1}{h_1} + \frac{F_1 + F_2}{h_2} + \frac{F_2}{h_3} \right)^2 - 4 \frac{F_1 F_2}{h_1 h_2 h_3} \right]^{1/2} \right),$$

λ_i — собственные значения спектральной задачи $Aq + \lambda q = 0$; $q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}$ — ее собственные векторы, E — единичная матрица. Отметим, что здесь и далее предполагается, что общая безразмерная глубина $h_1 + h_2 + h_3$ равна единице. В простейшем случае

$\Delta\rho_1 = \Delta\rho_2$ и $h_1 = h_3$ имеем $F_1 = F_2 \equiv F$ и $\lambda_2 = -F/h_1$, $\lambda_3 = -F/h_1 h_2$,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & h_2 \\ 1 & 0 & -2h_1 \\ 1 - \frac{1}{2} & & h_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

В любой точке (x, y) компоненты φ_i вспомогательного вектора Φ из правой части (3) могут быть определены с помощью функции Грина G_i :

$$\varphi_i = \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_i G_i(r) dx_1 dy_1, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$G_i = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \ln r, & i = 1, \\ -K_0(k_1 r), & i = 2, \\ -K_0(k_2 r), & i = 3. \end{cases} \quad (5)$$

где $K_0(\beta)$ — функция Макдональда нулевого порядка, $r = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]^{\frac{1}{2}}$, $k_{1,2} = (-\lambda_{2,3})^{\frac{1}{2}}$. Выражения для давлений в слоях удобно выписать через регулярные функции $\tilde{G}_1 = G_2 - \bar{G}_1$, $\tilde{G}_2 = G_3 - \bar{G}_1$ и через G_1 , имеющую интегрируемую особенность при $r \rightarrow 0$:

$$p_i = \iint_{-\infty}^{\infty} (\Pi_i G_1 + q_{i2} (s_{21} \Pi_1 + s_{22} \Pi_2 + s_{23} \Pi_3) \tilde{G}_1 + q_{i3} (s_{31} \Pi_1 + s_{32} \Pi_2 + s_{33} \Pi_3) \tilde{G}_2) dx_1 dy_1, \quad (6)$$

где q_{ij} , s_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) — элементы введенных выше матриц Q и S . Выражения (6) позволяют определить поля давлений в слоях по известному вектору Π . Предполагая, далее, что Π_i являются кусочно-постоянными функциями вида $\Pi_i = \sum_{j=1}^{m_i} \Pi_{ij}$ с постоянными значениями Π_{ij} на конечных носителях σ_{ij} , и переходя с помощью теоремы Стокса к контурным интегралам, получим

$$p_i = \sum_{j=1}^{m_i} \Pi_{ij} \oint_{C_{ij}} M w dv_{ij} + q_{i2} \sum_{l=1}^3 s_{2l} \sum_{j=1}^{m_l} \Pi_{lj} \oint_{C_{lj}} M_1 w dv_{lj} + q_{i3} \sum_{l=1}^3 s_{3l} \sum_{j=1}^{m_l} \Pi_{lj} \oint_{C_{lj}} M_2 w dv_{lj}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где $M = (r^2/4\pi)(\ln r - \frac{1}{2})$, $M_{1,2} = (\frac{1}{2}\pi k_{1,2}) [k_{1,2} r K_1(k_{1,2} r) - 1] - M$, $w = ((x_1 - x)\dot{x}_1 - (y_1 - y)\dot{y}_1)/r^2$, а C_{ij} — жидкие контуры областей σ_{ij} , описываемые с помощью непрерывно меняющегося вдоль них параметра v_{ij} ; точка сверху означает дифференцирование по v_{ij} . Теперь, выбирая на каждом из контуров C_{ij} набор из N_{ij} опорных точек, можно записать уравнения движения

$$\frac{d}{dt} r_l^{(ij)} = V_l^{(ij)}, \quad (8)$$

$$r_l^{(ij)}|_{t=0} = r_{l_0}^{(ij)}, \quad l = \overline{1, N_{ij}}, \quad j = \overline{1, m_i}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (9)$$

где $r_l^{(ij)}$ — радиус-вектор l -й лагранжевой частицы контура C_{ij} , ограничивающего расположенное в i -м слое j -е вихревое пятно. Правые части (8) определяются с помощью геострофических соотношений из (7).

Обыкновенные дифференциальные уравнения (8) с начальными условиями (9) решались методом Эйлера с пересчетом с постоянным шагом $\Delta t = 0,05$ при начальном числе опорных точек на окружностях единичного радиуса, равном 40. В процессе счета количество точек увеличивалось, если это необходимо, пропорционально растущей

длине контура. Сеточные функции, задающие параметрически контуры C_{ij} , интегрировались, дифференцировались и интерполировались с привлечением техники периодических кубических сплайнов [13]. При расчетах помимо оригинального алгоритма вычисления скоростей в правых частях (8) широко использовался программный комплекс В.Г. Макарова [14].

3. Исследование устойчивости осесимметричного трехслойного вихря. Рассмотрим случай одиночного бароклинического вихря в покоящейся на бесконечности жидкости ($m_j = 1, \Pi_{j1} \equiv \Pi_j, j = 1, 2, 3$). Любое решение (7) для $p_j(r, t)$, соответствующее произвольному радиальному распределению $\Pi_j(r), j = 1, 2, 3$, представляет собой стационарное состояние. Так же, как в [5], где рассмотрена модель двухслойного вихря, исследуем свойства устойчивости (относительно малых возмущений) указанного стационарного состояния, для которого линии постоянных потенциальных завихренности в полярных координатах характеризуются соотношениями $r_j = f_j(\theta, t; \alpha), \alpha = f_j(\theta, 0; \alpha), j = 1, 2, 3$. Пусть $f_j(\theta, t; \alpha) = \alpha + \epsilon_j f_j(\theta, t; \alpha), |\epsilon_j| \ll 1, \epsilon_j = A_j(\alpha) \exp(i(\gamma t + m\theta)), m \geq 1$ и

$$\Pi_j = \begin{cases} p_j, & r \leq \alpha, \\ 0, & r > \alpha, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3.$$

Метод возмущений по степеням малого параметра ϵ_j , допускающий линеаризацию записанных для f_j уравнений движения, позволяет проблему устойчивости вихря свести к решению спектральной задачи, имеющей характеристическое уравнение

$$|B - \gamma E| = 0$$

с действительной матрицей B вида

$$b_{ll} = q_{l1} \left(\frac{1}{2} s_{1l} P_l - \frac{m}{\alpha} U \right) + q_{l2} (s_{2l} P_l T_m(k_1 \alpha) - \frac{m}{\alpha} W_1) + q_{l3} (s_{3l} P_l T_m(k_2 \alpha) - \frac{m}{\alpha} W_2), \quad (10)$$

$$b_{lj} = P_j \left(\frac{1}{2} q_{1l} s_{1j} + q_{l2} s_{2j} T_m(k_1 \alpha) + q_{l3} s_{3j} T_m(k_2 \alpha) \right); \quad l, j = 1, 2, 3, \quad l \neq j.$$

В выражениях (10)

$$U = (\alpha/2) \sum_{j=1}^3 s_{1j} P_j, \quad T_m(\beta) = m I_m(\beta) K_m(\beta), \quad m \geq 1, \quad W_n = \alpha T_1(k_n \alpha) \sum_{j=1}^3 s_{n+1,j} P_j,$$

$$n = 1, 2.$$

Свойства устойчивости вихря полностью определяются коэффициентами (10) матрицы B , характеризующей его кинематическую (P_j) и плотностную (k_1, k_2) структуры.

В качестве примера на рис. 1 представлены кривые нейтральной устойчивости вихрей с нулевой интенсивностью, т. е. вида

$$h_1 P_1 + h_2 P_2 + h_3 P_3 = 0, \quad (11)$$

для отдельных мод возмущений (первая неустойчивая мода имеет номер $m = 2$) в простейшем симметричном случае, когда матрицы Q и S имеют вид (4). В первом случае (а) $P_2 = 0$ и, следовательно, $P_3 = -P_1$, т. е. вихрь имеет противоположные компенсирующие друг друга вращения в верхнем и нижнем слоях. Во втором — (б) $P_1 = P_3$ и, таким образом, теперь вихревое пятно среднего слоя ввиду (11) должно компенсировать вихри, сосредоточенные в верхнем и нижнем слоях. Отметим, что случаи а и б соответственно отвечают модонам $\{2^+\}$ и $\{3^+\}$ работы [10]. В плоскости параметров (h_2, k_1) выше каждой дисперсионной кривой становится неустойчивой мода с соответствующим номером. В обоих вариантах число неустойчивых мод растет при уменьшении толщины среднего слоя, а также при увеличении параметра k_1 (а следовательно, и k_2 , однозначно определяемого через k_1), характеризующего степень бароклинности слоистой среды. Очевидно, кривые нейтральной устойчивости в случае а при $h_2 = 0$ выходят на ось k_1 при значениях этого параметра, равных соответствующим значениям k при $d = 0,5$ в задаче об устойчивости двухслойного вихря [5].

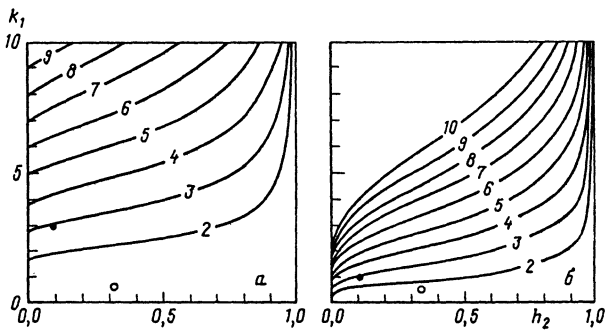


Рис. 1. Кривые нейтральной устойчивости осесимметричных вихрей вида (11) для случая $\Delta\rho_1 = \Delta\rho_2$, $h_1 = h_3$ в плоскости параметров (h_2, k_1) при $P_2 = 0$ (а) и $P_1 = P_3$ (б). Темные точки соответствуют значениям параметров экспериментов, иллюстрируемых рис. 2, а светлые – рис. 5 и 6

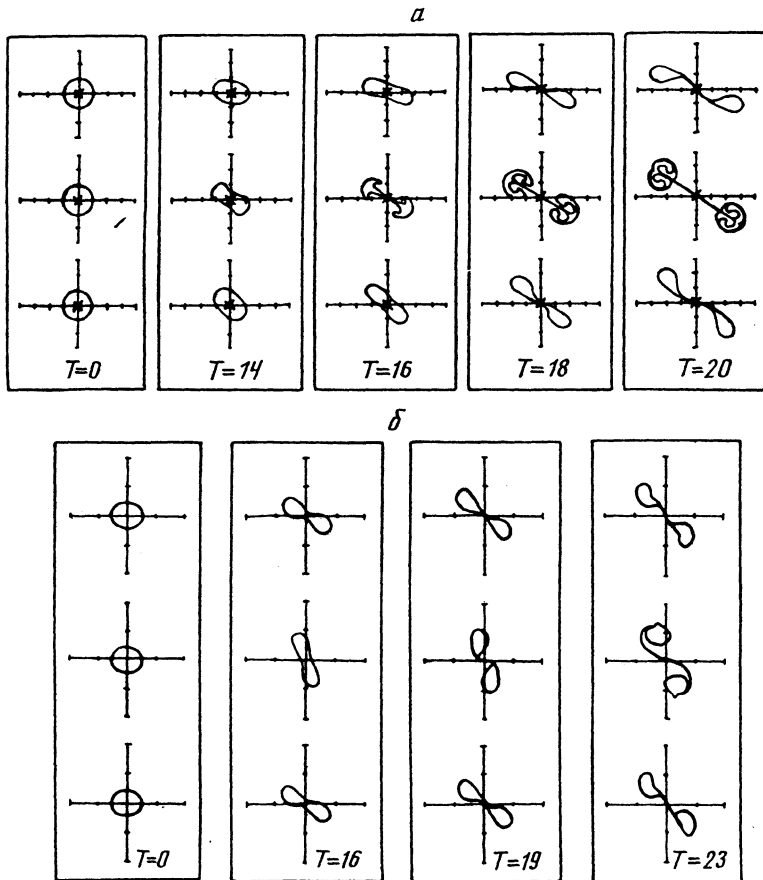


Рис. 2. Распад неустойчивых вихрей при $P_2 = 0$ (а) и $P_1 = P_3$ (б) при $h_1 = h_3 = 0,45$, $h_2 = 0,1$. Описание условий численных экспериментов в тексте

На рис. 2 иллюстрируется процесс нелинейного распада таких вихрей при условиях, когда неустойчивой является единственная мода с $m = 2$ (темные точки на рис. 1). В каждой из рамок на этом и других рисунках изображены конфигурации эволюционирующих контуров вихрей, расположенных в верхнем, среднем и нижнем слоях, последовательно сверху вниз, для указанных моментов безразмерного времени. В случае а, когда $P_2 = 0$, контур среднего слоя можно рассматривать как некоторую

маркерную линию, деформирующуюся за счет скоростей, индуцируемых вихрями соседних слоев. В верхнем и нижнем слоях первоначально круглые вихри противоположных вращений на первом этапе вытягиваются, формируя квазиэллиптические образования, развернутые друг относительно друга на некоторый угол, а затем в каждом из них происходит разделение на две расходящиеся в противоположные стороны части. Вертикальная структура бароклиных вихревых образований такова, что разбегающиеся от общего центра тяжести (он всюду отмечен косым крестиком) части можно трактовать как вихри с "наклонными" осями [10]. В среднем слое при этом генерируются две разбегающиеся симметричные "грибовидные" структуры. В случае б, где для ускорения процесса распада в начальный момент времени задавались небольшие возмущения контуров, ассоциирующиеся со второй модой, разрушение происходит по следующей схеме. Вихревые пятна верхнего и нижнего (среднего) слоев вытягиваются и разворачиваются против направления (в направлении) часовой стрелки, после чего в каждом из них происходит разделение на две части. Результатом этого процесса являются расходящиеся в противоположные стороны бароклинные вихри с "дугообразными" осями [10].

4. Задача о топографическом циклогенезе. Приведенная в п. 2 постановка задачи, осуществленная в предположении отсутствия внешних сил, может быть обобщена на случай, например, учета зонального потока и рельефа дна. Формально это приводит к появлению в правых частях (6) и (7) аддитивных членов p_{i0} ($i = 1, 2, 3$), характеризующих определяемое этими факторами "внешнее" поле. Рассмотрим процесс формирования вихревой структуры над подводным препятствием в форме прямого кругового цилиндра единичного радиуса с вертикальной образующей высоты $h = \epsilon \sigma$ (где ϵ — число Кибеля—Россби, а σ — амплитудный топографический параметр) в инициированном из состояния покоя кинематически однородном зональном потоке со скоростью $V(t)$. В этом случае

$$p_{i0} = -V(t)y - \sigma c_i(k_1, k_2, r), \quad i = 1, 2, 3$$

$$c_i = \begin{cases} \frac{r^2}{4} \frac{q_{i2}s_{23}}{s_{13}k_1^2} (1 - k_1 K_1(k_1) I_0(k_1 r)) - \frac{q_{i3}s_{33}}{s_{13}k_2^2} (1 - k_2 K_1(k_2) I_0(k_2 r)), & r \leq 1, \\ \frac{1 + \ln r^2}{4} - \frac{q_{i2}s_{23}}{s_{13}k_1} I_1(k_1) K_0(k_1 r) - \frac{q_{i3}s_{33}}{s_{13}k_2} I_1(k_2) K_0(k_2 r), & r \geq 1. \end{cases}$$

Выражения для скоростей в слоях имеют вид

$$u_i = V(t) + \frac{\sigma y}{r} d_i(k_1, k_2, r), \quad v_i = -\frac{\sigma x}{r} d_i(k_1, k_2, r), \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

$$d_i = \begin{cases} \frac{r}{2} + \frac{q_{i2}s_{23}}{s_{13}} K_1(k_1) I_1(k_1 r) + \frac{q_{i3}s_{33}}{s_{13}} K_1(k_2) I_1(k_2 r), & r \leq 1, \\ \frac{1}{2r} + \frac{q_{i2}s_{23}}{s_{13}} I_1(k_1) K_1(k_1 r) + \frac{q_{i3}s_{33}}{s_{13}} I_1(k_2) K_1(k_2 r), & r \geq 1. \end{cases}$$

Задача решалась при

$$V(t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctg} t \quad (13)$$

и начальных условиях для скачков потенциальной завихренности на жидких границах расположенных над возвышенностью единичных кругов:

$$t = 0, \quad P_1 = P_2 = 0, \quad P_3 = \sigma/s_{13}. \quad (14)$$

Таким образом, в начальный момент времени состояние характеризуется полным покоем, при котором свободная завихренность P_3 компенсирует стационарный топографический вихрь. Зональное течение (13) со скоростью, первоначально равной нулю и

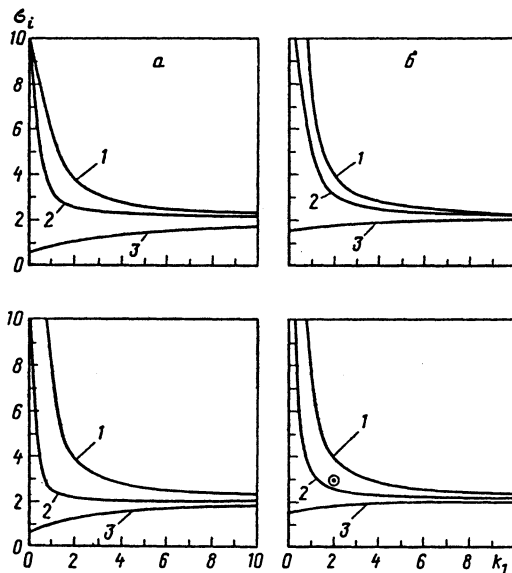


Рис. 3. Проекция кривых (15) на плоскость параметров (k_1, σ_i) при $h_1 = h_2 = h_3$ (а) и $h_1 = 0,1, h_2 = 0,3, h_3 = 0,6$ (б)

затем асимптотически приближающейся к единице, может сносить свободный вихрь с возвышенности частично или полностью в зависимости от характеризующейся величиной σ степени захвата. Можно оценить критические значения параметра σ^* появления в каждом из слоев точки (очевидно, над южной периферией цилиндра, где $y = -1$), в которой при фиксированном $U(t)$ впервые обращается в нуль зональная скорость u_i . Полагая, например, $U(t) \equiv 1$, из (12) получим

$$\sigma_i^* = \kappa_i^{-1}, \quad \kappa_i = \frac{1}{2} \frac{q_{i2} s_{23}}{s_{13}} L_1(k_1) + \frac{q_{i3} s_{33}}{s_{13}} L_1(k_2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (15)$$

где $L_1(\beta) = I_1(\beta)K_1(\beta)$ — монотонно убывающие функции с предельными значениями $\frac{1}{2}$ и 0 при $\beta \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \infty$ соответственно. Поскольку $k_2 > k_1$, получим

$$0 < \frac{1}{2} - L_1(k_2) < \kappa_1 = \frac{1}{2} - \frac{\lambda_3 L_1(k_1) - \lambda_2 L_1(k_2)}{\lambda_3 - \lambda_2} < \frac{1}{2} - L_1(k_1) < \frac{1}{2},$$

$$\kappa_1 < \kappa_1 + \frac{F_2(L_1(k_1) - L_1(k_2))}{h_2 h_3 (k_2^2 - k_1^2)} < \kappa_2 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(\lambda_3 + F_2/h_2 h_3)L_1(k_1) - (\lambda_2 + F_2/h_2 h_3)L_1(k_2)}{\lambda_3 - \lambda_2} < \frac{1}{2} - L_1(k_1) < \frac{1}{2},$$

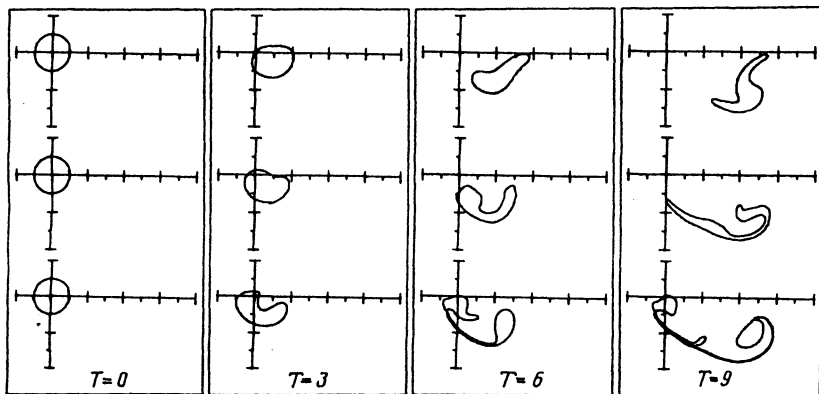
$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + L_1(k_2)(1/h_3 - 1) < \kappa_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{h_3(\lambda_3 - \lambda_2)} \left((h_3 \lambda_3 + \frac{F_2}{h_2} + \lambda_2 +$$

$$+ \frac{F_1(h_1 + h_2)}{h_1 h_2}) L_1(k_1) - (h_3 \lambda_3 + \frac{F_2}{h_2} + \lambda_3 + \frac{F_1(h_1 + h_2)}{h_1 h_2}) \times$$

$$\times L_1(k_2) < \frac{1}{2} + L_1(k_1) \left(\frac{1}{h_3} - 1 \right) < \frac{1}{2h_3},$$

откуда следует

$$0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \frac{1}{2} < \kappa_3 < \frac{1}{2h_3}, \quad (16)$$



a

b

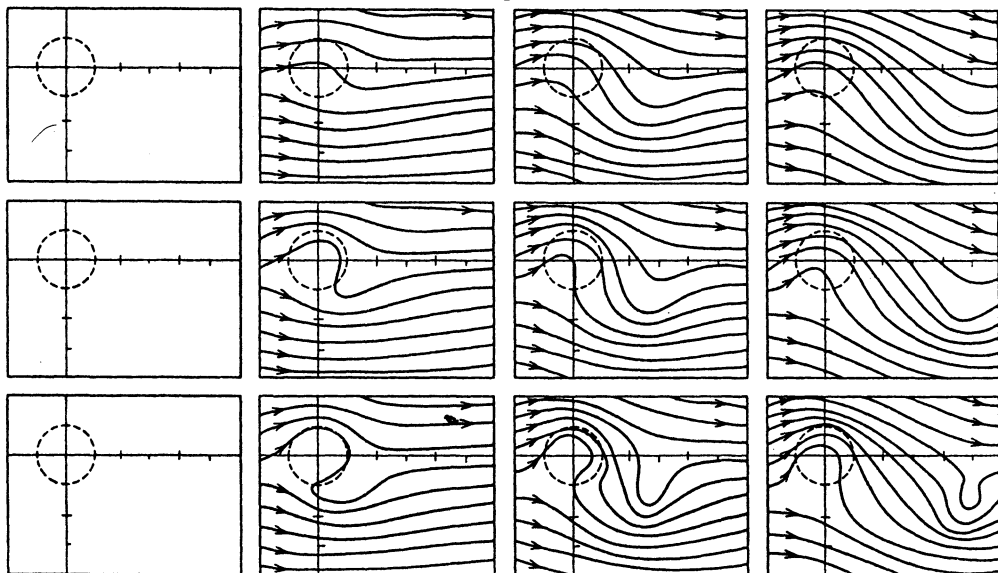


Рис. 4. Иллюстрация процесса формирования вихревой структуры над цилиндрическим подводным препятствием в зональном потоке вида (13) при $k_1 = 2$, $k_2 = 3,44$ и $\sigma = 3$ последовательно деформирующихся первоначально круглых контуров (a) и линий тока горизонтального движения в слоях (б)

причем $\kappa_{1,2} \rightarrow \frac{1}{2} - 0$, $\kappa_3 \rightarrow \frac{1}{2} + 0$ при $k_1, k_2 \gg 1$ и $\kappa_{1,2} \rightarrow 0$, $\kappa_3 \rightarrow \frac{1}{2}(2h_3)$ при $k_1, k_2 \ll 1$. Малость k_1 и k_2 по существу диктует необходимость выполнения условий твердой крышки на границах раздела между слоями, что предохраняет верхний и средний слой от влияния конечных возмущений топографии; поэтому для малых k_i имеем $\sigma_i \rightarrow \infty$ ($i = 1, 2$). Оба предела ($k_1, k_2 \rightarrow \infty$ и $k_1, k_2 \rightarrow 0$) соответствуют условиям баротропии (в рамках двухслойной модели это показано в [7]). Первый случай отвечает однородному океану, а второй — трехслойному с не взаимодействующими слоями и теоретически бесконечными скачками плотности на границах раздела между ними. В обеих ситуациях критические значения высоты препятствия характеризуются соотношением $\sigma^* = 2a$, причем асимптотически $\sigma^* = \sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma_3^*$, $a = 1$ в первом предельном случае и $\sigma^* = \sigma_3^*$, $a = h_3$ — во втором, что согласуется с известным результатом [15]. Из (16) получаем

$$\sigma_1^* > \sigma_2^* > 2 > \sigma_3^* > 2h_3 > 0,$$

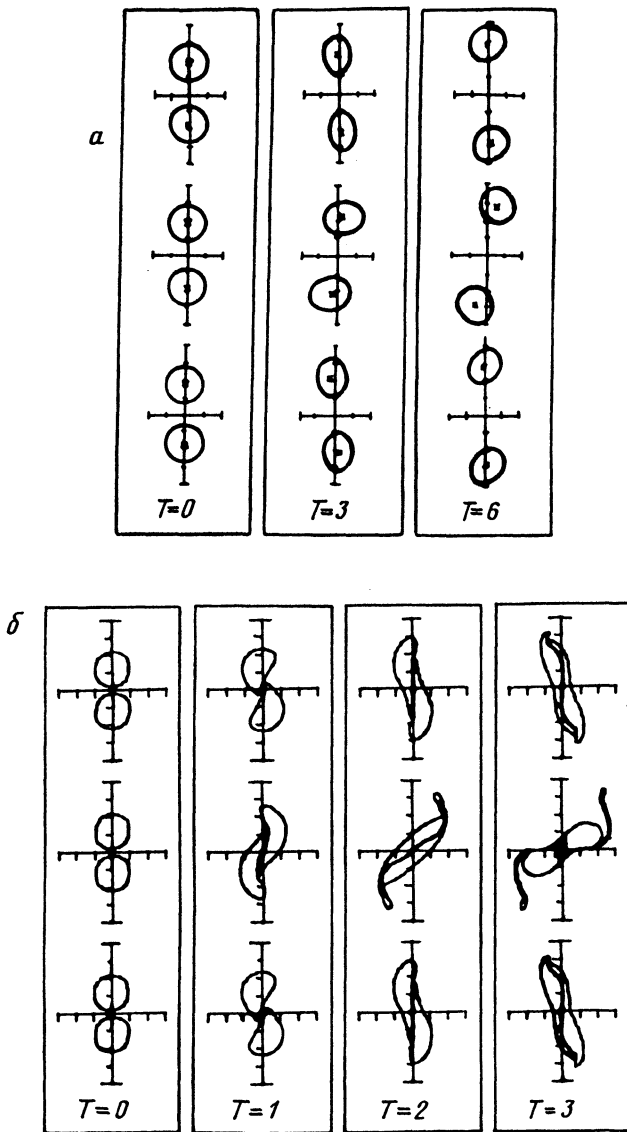


Рис. 5. Процесс взаимодействия двух модов вида $\{3^+, 3^+\}$ при $F_1 = F_2 = 0,1$ и $h_1 = h_2 = h_3$ для случаев $L = 1,8$ (а) и $L = 1,2$ (б)

и, таким образом, всегда поток наиболее (наименее) подвержен влиянию топографии в нижнем (верхнем слое). На рис. 3 для примера приведены кривые $\sigma_i^*(k_1)$ для случаев $h_1 = h_2 = h_3 = 1/3$ (а) и $h_1 = 0,1, h_2 = 0,3, h_3 = 0,6$ (б); в верхнем ряду рисунков $F_2 = F_1$, в нижнем $F_2 = 5 \cdot F_1$ (что равносильно условию $\Delta\rho_1 = 5 \cdot \Delta\rho_2$). Цифры 1, 2, 3 отвечают номерам слоев. Для точек, лежащих выше кривых, значения σ_i и k_1 удовлетворяют условиям существования при $U(t) = 1$ "застойных" областей в соответствующих слоях. Отмеченная кружком точка определяет параметры, при которых выполнен иллюстрируемый на рис. 4 численный эксперимент. На рис. 4, а представлены эволюционирующие жидкие контуры областей с первоначальными значениями потенциальной завихренности, задаваемыми условиями (14) и расположенными при $t = 0$ строго над цилиндрическим препятствием. На рис. 4, б, где штрихом обозначена внешняя граница возвышенности, изображены линии тока горизонтального движения в

Номера рисунков	Параметры				
	k_1	k_2	F_1	F_2	$h_1, \text{м}$
2, а	3	9,49	4,05	4,05	1800
2, б	1	3,61	0,45	0,45	1800
4	2	3,44	0,41	2,05	400
5-6	0,58	1	0,1	0,1	1333,33

Номера рисунков	Параметры				
	$h_2, \text{м}$	$h_3, \text{м}$	$h, \text{м}$	$R, \text{км}$	$T, \text{сут}$
2, а	400	1800	0	111,0	16,14
2, б	400	1800	0	63,2	9,16
4	1200	2400	296,3	40,5	29,44
5-6	1333,33	1333,33	0	20,0	3,20

каждом из слоев. Рисунок демонстрирует захватывающие свойства топографии, а также процесс формирования "подветренного" вихревого следа, наиболее заметного на нижних горизонтах.

5. **Взаимодействие трехслойных вихрей.** Представленные на рис. 5 результаты расчетов были получены как тестовые для качественного сравнения с моделью сингулярных геострофических вихрей [10]. Рассматривается процесс взаимодействия модонов ($h_i = 1/3, i = 1, 2, 3; F_1 = F_2 = 0,1$) вида $\{3^+, 3^+\}$ в терминологии [10] — когда величина L , равная половине первоначального расстояния между центрами вихревых образований, соизмерима с радиусом экранировки $R_3 = \sqrt{10/3} \approx 1,05$. Для точечных вихрей [10] при $L \gg R_3$ преобладающим оказывается взаимодействие между вихрями, составляющими каждый из модонов, при $L \ll R_3$ — между вихрями, принадлежащими одному слою, и при $L \sim R_3$ происходит переход от одного режима к другому. Такая же ситуация имеет место и для распределенных модонов (рис. 5). В первом случае на начальном этапе движения благодаря послойному взаимодействию вихри в верхнем и нижнем слоях сдвигаются в одну сторону, а в среднем — в другую, что для каждого из модонов создает импульс поступательного движения, и в результате два вихря с "дугообразными" осями разбегаются в противоположные стороны. (Сравните с рис. 2, б, где подобный результат получается после развала одного, но более крупного (см. таблицу), трехслойного вихря.) Во втором случае послойное взаимодействие играет определяющую роль в течение всего процесса. В отличие от сингулярных модонов здесь имеет место слияние, характерное для близко расположенных распределенных вихрей одного знака. Слившиеся циклоны верхнего и нижнего слоев и антициклон среднего слоя совершают вращательные движения вокруг общего центра. Отметим, что в плоскости параметров (h_2, k_1) условиям этих экспериментов соответствуют светлые кружки на рис. 1, находящиеся в области нейтральной устойчивости (по отношению к малым возмущениям формы) вихрей.

Наконец, рисунок 6 иллюстрирует процесс взаимодействия двух бароклинных вихрей различной модальности — $\{3^+, 2^+\}$, второй из которых имеет радиус экранировки $R_2 = \sqrt{10/3} \approx 1,82$. При $L = 1,8$ взаимодействие на начальном этапе движения в основном осуществляется послойно. В результате мы наблюдаем зарождение и последующее расхождение двух дипольных структур: пары, сформированной из вихрей противоположных знаков нижнего слоя, и двухслойного вихря с "наклонной" осью, состоящего из практически слившихся циклонов верхнего слоя и антициклона, сосредоточенного в среднем слое. Очевидно, оба эти вихревые образования, имея нулевую суммарную интенсивность, удовлетворяют условию компенсации.

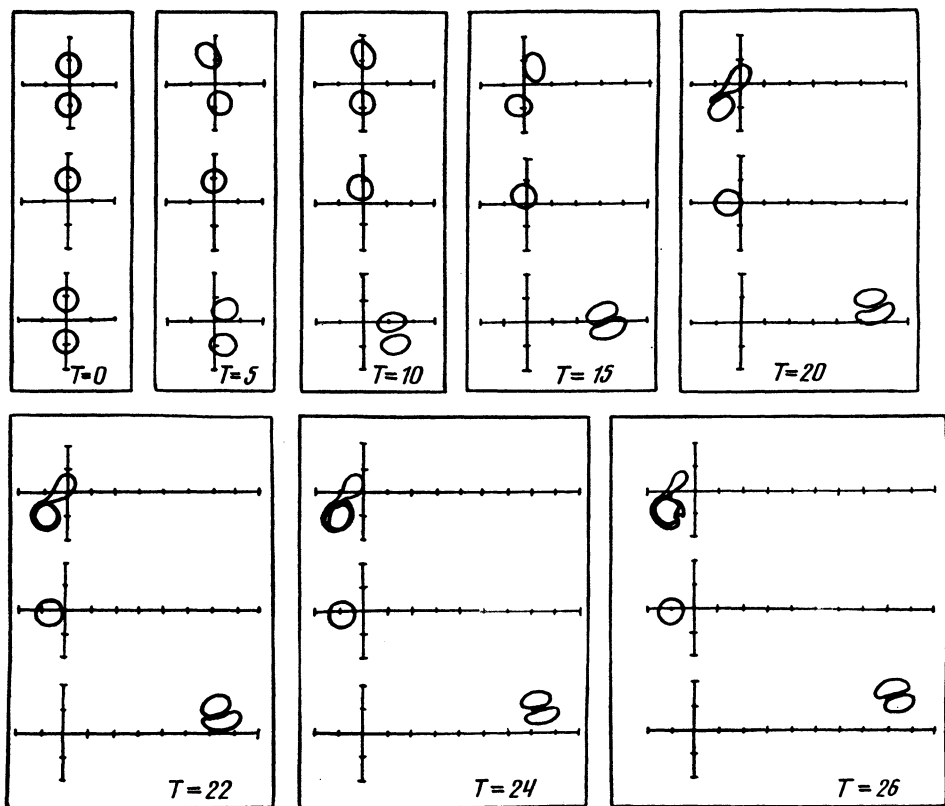


Рис. 6. То же для модонов вида $\{3^+, 2^+\}$ при $L = 1,8$

6. О геофизических приложениях результатов. На всех представленных выше рисунках безразмерные радиусы вихрей равны единице, время является также безразмерным параметром. Для того чтобы численным экспериментам можно было дать геофизическую интерпретацию, следует сделать некоторые оценки. Если принять $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$, $\Delta\rho_1 = 10^{-3} \text{ г/см}^3$, $H = 4 \text{ км} = 4 \cdot 10^5 \text{ см}$, $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $g = 10^3 \text{ см/с}^2$, $U = 10 \text{ см/с}$, то характерные масштабы будет представлять следующая таблица. Указанные в таблице R — радиус и T — период собственного вращения вихря отвечают безразмерным единичным интервалам расстояния и времени соответственно.

Сделаем также несколько замечаний относительно выбора исходных значений параметров. В задаче об устойчивости вихря толщина среднего слоя выбрана небольшой из следующих соображений. В случае *a* моделируется развал бароклининого вихря-хетона с противоположными вращениями в верхнем и нижнем слоях. Нам представляется вполне правдоподобным наличие между ними относительно тонкого переходного слоя. В случае *б* проявление неустойчивости вихря с интенсивным ядром в тонком среднем слое можно интерпретировать как развал на две части внутритермоклинного вихря, для толщины которого выбранный масштаб (400 м) характерен [16]. Соотношения между толщинами слоев и между значениями чисел Фруда, при которых скачок плотности на верхней границе раздела впятеро превышает разность плотностей на нижней границе (задача о топографическом циклогенезе), не противоречат средним значениям этих параметров в океане [11]. Равенство толщин всех трех слоев в эксперименте по взаимодействию модонов продиктовано желанием максимально приблизить параметры данной модели и [10].

Очевидно, возможности предложенной версии МКД-модели не ограничиваются рамками рассмотренных выше примеров. Модель, по-видимому, пригодна для качественного исследования эволюции реально наблюдаемых вихревых образований. Она должна быть наиболее эффективной для предсказания на синоптический или несколько больший период поведения системы вихрей, если с помощью комплексных полигонных измерений (таких, скажем, которые представлены в [17]) получены сведения об основных термохалинных и динамических характеристиках в некоторой области океана. Реальный непрерывный профиль плотности может быть аппроксимирован двухступенчатой кусочно-постоянной функцией, например, методом построения вспомогательных калибровочных функционалов [18]. Что касается задачи аппроксимации наблюдаемых вихревых структур набором областей с постоянными значениями потенциального вихря в каждом из слоев, то она, на наш взгляд, требует специального рассмотрения.

В заключение автор выражает признательность В.Ф. Козлову за внимание к работе, а также рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zabusky N.J., Hughes M.N., Roberts K.V.* Contour dynamics for Euler equations in two dimensions // *J. Comput. Phys.* 1979. V. 30. № 1. P. 96–106.
2. *Dritshel D.G.* Contour dynamics and contour surgery: numerical algorithms for extended, high-resolution modelling of vortex dynamics in two-dimensional, inviscid, incompressible flow // *Computer Phys. Rep.* 1989. V. 10. № 3. P. 77–146.
3. *Козлов В.Ф.* Метод контурной динамики (МКД) в океанологических исследованиях (обзор) // Метод контурной динамики в океанологических исследованиях. Владивосток: ТОИ ДВО АН СССР, 1990. С. 6–27.
4. *Козлов В.Ф.* Построение численной модели эволюции геострофических вихрей в бароклинной жидкости на основе метода контурной динамики // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1985. Т. 21. № 2. С. 211–213.
5. *Козлов В.Ф., Макаров В.Г., Соколовский М.А.* Численная модель бароклинной неустойчивости осесимметричных вихрей в двухслойной океане // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1986. Т. 22. № 8. С. 868–874.
6. *Helfrich K.R., Send U.* Finite-amplitude evaluation of two-layer geostrophic vortices // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 197. P. 331–348.
7. *Polyani L.M., Zabusky N.J., Flierl G.R.* Two-layer geostrophic vortex dynamics. Pt 1. Upper-layer V-states and merger // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 205. P. 215–242.
8. *Соколовский М.А.* Трехслойная модель геострофических вихревых движений в океане // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: Тез. докл. всесоюз. конф. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1990. С. 135–136.
9. *Smeed D.A.* Baroclinic instability of three-layer flows. Pt 1. Linear stability // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 194. P. 217–231.
10. *Гряник В.М., Тевс М.В.* Динамика сингулярных геострофических вихрей в N -слойной модели атмосферы (океана) // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1989. Т. 25. № 3. С. 243–256.
11. *Каменкович В.М., Кошляков М.Н., Монин А.С.* Синоптические вихри в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 512 с.
12. *Каменкович В.М., Ларичев В.Д., Харьков Б.В.* Бароклинная квазигеострофическая модель для анализа синоптических вихрей в открытой области океана // *Океанология.* 1981. Т. 21. Вып. 6. С. 949–959.
13. *Козлов В.Ф.* Метод контурной динамики в модельных задачах о топографическом циклогенезе в океане // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1983. Т. 19. № 8. С. 845–854.
14. *Макаров В.Г.* Комплекс программ для исследования методом контурной динамики плоских вихревых течений идеальной жидкости // Метод контурной динамики в океанологических исследованиях. Владивосток: ТОИ ДВО АН СССР, 1990. С. 28–39.
15. *Ingersol A.P.* Inertial Taylor columns and Jupiter's Great Red Spot // *J. Atmos. Sci.* 1969. V. 26. № 4. P. 744–752.
16. *Белкин И.М., Емельянов М.В., Костяной А.Г., Федоров К.Н.* Термохалинная структура промежуточных вод океана и внутритермоклинные вихри // *Внутритермоклинные вихри в океане.* М.: ИО АН СССР, 1986. С. 8–34.
17. *Берестов А.Л., Егорихин В.Д., Иванов Ю.А. и др.* Термохалинные, гидрохимические и динамические характеристики интрузионной линзы средиземноморских вод по данным экспедиции "Мезополигон-85" в Тропической Атлантике // *Внутритермоклинные вихри в океане.* М.: ИО АН СССР, 1986. С. 35–49.

18. *Flierl G.* Calibration of two-layer models and a more satisfactory two-degree-of-freedom model // Исследование синоптической изменчивости океана. Севастополь: МГИ АН УССР, 1977. С. 386–393.

Академия наук СССР
Тихоокеанский
океанологический институт

Поступила в редакцию
16.VII.1990,
после доработки
15.XI 1990

M.A. SOKOLOVSKIY

**MODELLING OF THREE-LAYERED VORTICAL MOTIONS
IN THE OCEAN BY CONTOUR DYNAMICS**

The contour dynamics method (CDM) is generalized to the case of three-layered steady stratified liquid. Examples are given of the proposed algorithm use in problems of the nonstable three-layered vortex decay, of the topographic cyclogenesis in kinematically uniform stratified zonal flow over an isolated submarine obstacle, and of the interaction of two three-layered vortices-modons.